ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 2

УДК 535.317

ФИЗИКА

А. Г. Багдоев, Г. С. Безиргенян

# О самофокусировке мощной световой волны в оптической среде с насыщением

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 16/II 1986)

В настоящей работе решается задача о самофокусировке интенсивной световой волны в однородной среде, поляризованность которой является нелинейной функцией от величины $E=|\vec{E}|$ линейно поляризованного света.

В настоящее время имеется ряд работ, посвященных исследованию как свойств сред с насыщением ([1–5]), так и решению задач самофокусировки стационарных пучков ([6]). Следует отметить, что для стационарных пучков в газовых лазерах диэлектрическая проницаемость $\varepsilon$ задается формулой $\sqrt{\varepsilon}=\sqrt{\varepsilon_0}+n_2'E^2/(1+2E^2/E_s^2)$, где смысл величин указан в той же работе.

Решение задачи о стоячей волне, образованной двумя равными по амплитуде бегущими волнами, направленными навстречу друг другу, приводится в ([7–10]).

1. Для двухуровневой атомной системы и невырожденных уровней в поле мощной импульсной волны вблизи резонанса в ([1]) для $\varepsilon$ получена формула

$$\varepsilon=1\pm\frac{4\pi|d_{12}^{\pm}|^2}{\varepsilon h\sqrt{1+\alpha}}=1+\frac{\varepsilon_0-1}{\sqrt{1+\lambda|E_1|^2}}, \tag{1}$$

где смысл величин $d_{12}^{\pm}$, $h$, $\alpha$ указан в ([1]), $\varepsilon_0$, $\lambda$—известные постоянные, а $E_1$—амплитуда волны.

Вначале рассмотрим распространение стационарных узких пучков в нелинейной среде, в которой $\varepsilon$ дается формулой (1).

Исходные уравнения электродинамики совместно с материальными уравнениями сводятся к уравнению

$$\nabla^2E-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2E}{\partial t^2}=0. \tag{2}$$

Решение уравнения (2) ищется в форме

$$E=\mathrm{Re}\{\mathcal{E}(\vec{r})e^{-i(\omega t-kx)}\},\quad \mathcal{E}=E_1, \tag{3}$$

где $\omega=k/\sqrt{\varepsilon_0}c$, ось $Ox$—направлена по оси симметрии пучка, а остальные обозначения общепринятые.

Подставляя (3) в уравнение (2) и отбрасывая слагаемое, содер-

жащее $\partial^2\mathscr{E}/\partial x^2$ (что принято в задачах дифракции пучков), получим, что

$$2ik\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial x}+\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial y^2}+\frac{m}{y}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial y}+k^2\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda\mathscr{E}^2}}-1\right)\frac{\varepsilon_0-1}{\varepsilon_0}\cdot\mathscr{E}=0, \tag{4}$$

где значение $m=0$ соответствует плоской задаче, а значение $m=1$— осесимметричной задаче.

Полагая $\varepsilon=ae^{i\varphi}$ и разделив вещественную и мнимую части, получим систему уравнений для амплитуды и фазы:

$$\begin{gathered}2k\frac{\partial a}{\partial x}+2\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+a\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{m}{y}a\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\\ -2ak\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}-a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\frac{m}{y}\frac{\partial a}{\partial y}+k^2\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda a^2}}-1\right)\frac{(\varepsilon_0-1)a}{\varepsilon_0}=0.\end{gathered} \tag{5}$$

Решение полученной системы ищем в форме гауссовых пучков:

$$a=a_0[f(x)]^{-\frac{1+m}{2}}\exp\left(-\frac{y^2}{2y_0^2f^2}\right),\quad \varphi=k\left[\sigma(x)+\frac{y^2}{2R(x)}\right].$$

Подставляя выражение $a$ и $\varphi$ в систему уравнений (5) приравнивая члены порядка $0(1)$ и $0(y^2)$, получим:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{f}\frac{df}{dx} \quad (6), \qquad \frac{d^2f}{dx^2}-\frac{1}{k^2y_0^4}\frac{1}{f^3}-\frac{\varepsilon_0-1}{2\varepsilon_0}\left(1+\lambda\frac{a_0^2}{f^2}\right)^{-3/2}\frac{\lambda a_0^2}{f^3y_0^2}=0, \tag{7}$$

$$\frac{d\sigma}{dx}=-\frac{1}{y_0^2k^2f^3}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-\lambda a_0^2/f^2)^{1/2}}-1\right]\frac{\varepsilon_0-1}{\varepsilon_0},$$

где ради простоты рассмотрен случай $m=1$.

Умножая (7) на $f'$ и интегрируя полученное уравнение с учетом начальных условий $f=1$, $df/dx=1/R_0$ при $x=0$, можно показать, что решение записывается в форме

$$x=\pm\int_1^f\left[C-\frac{1}{k^2y_0^4}\frac{1}{f^2}+\frac{\varepsilon_0-1}{\varepsilon_0}\frac{1}{y_0^2}\left(1+\lambda\frac{a_0^2}{f^2}\right)^{-1/2}\right]^{-1/2}df, \tag{8}$$

где $$c=\frac{1}{R_0^2}+\frac{1}{k^2y_0^4}-\frac{\varepsilon_0-1}{\varepsilon_0}\frac{1}{y_0^2}(1+\lambda a_0^2)^{-1/2}.$$

Более интересен случай $\varepsilon_0-1<0$. Вначале рассмотрим случай, когда начальный фронт волны плоский ($1/R_0=0$). Вводя обозначения

$$\beta=-\frac{\varepsilon_0-1}{\varepsilon_0}\frac{1}{y_0^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda}a_0},\qquad z=\frac{1}{\beta k^2y_0^4} \tag{9}$$

и предполагая, что волна достаточно мощная ($\sqrt{\lambda}a_0\gg1$), из (8) можно найти, что

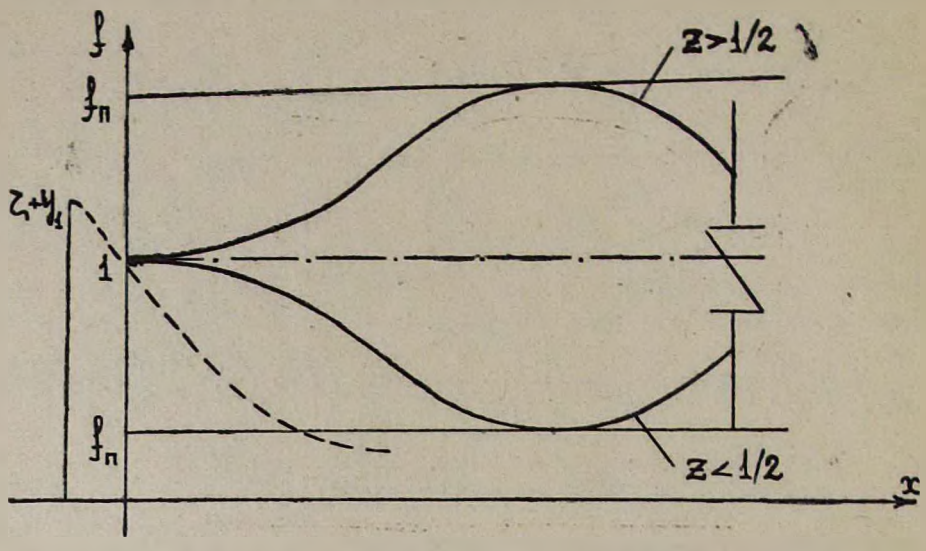
$$x=\mp\int_1^f\frac{fdf}{\sqrt{\beta(1-f)(f-f_1)(f-f_2)}}, \tag{10}$$

где $f_n=\frac{1}{2}(z+\sqrt{z(z+4)})$, $f_2=\frac{1}{2}(z-\sqrt{z(z+4)})$.

Уравнение (7) с учетом новых обозначений и сделанного допущения можно переписать в форме

$$\frac{d^2f}{dx^2}=3\left(\frac{z}{f^3}-\frac{1}{2}\right). \qquad (11)$$

Поскольку $|\varepsilon_0-1|$ мало ($10^{-4}$), то $\beta>0$ и при $f^3\gtrless 2z$ соответственно $d^2f/dx^2\lessgtr 0$. Форма кривой при $z\gtrless 1/2$ изображена на рисунке.




Отметим, что полученное решение является периодическим, что следует из финитности решения ($1\leqslant f\leqslant f_n$).

При $z<1/2$ (сходящиеся пучки) решение (10) можно представить в форме эллиптических интегралов

$$x=-\frac{2}{\sqrt{\beta(1-f_2)}}[f_2F(\varphi,\gamma)+(1-f_2)E(\varphi,\gamma)], \qquad (12)$$

где $F(\varphi,\gamma)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\varphi}}$, $E(\varphi,\gamma)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\gamma^2\sin^3\varphi}\,d\varphi$

$$\sin\varphi=\sqrt{\frac{1-f}{1-f_n}}, \quad \gamma=\sqrt{\frac{1-f_n}{1-f_2}}.$$

Из (12) следует, что

$$x_n=-\frac{2}{\sqrt{\beta(1-f_2)}}\left[f_2F\left(\frac{\pi}{2},\gamma\right)+(1-f_2)E\left(\frac{\pi}{2},\gamma\right)\right], \qquad (13)$$

где $2x_n$—период функции $f(x)$.

Рассмотрим общий случай ($1/R_0\neq 0$). В этом случае решение (8) можно представить в форме

$$x=-\int_1^f \frac{f\,df}{\sqrt{f^3-3\zeta f^2+z}\cdot\sqrt{-\beta}},\qquad \zeta=\frac{1}{3}\left(z+1+\frac{1}{R_0^2\beta}\right). \tag{14}$$

Показывается, что корни трехчлена имеют вид

$$y_1=-2R\cos\frac{\Psi}{3},\quad y_2=-2R\cos\left(\frac{\Psi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right),\quad y_3=-2R\left(\frac{\Psi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right),$$

где $$y=f-\zeta,\quad R=-\zeta,\quad \cos\Psi=1-\frac{z}{2\zeta^3}.$$

Для реального пучка $y_1>0$, $y_2<0$ и график функции $f(x)$ для $f'(0)<0$ изображен ка рисунке пунктиром.

2. Рассмотрим распространение импульсных пучков в нелинейных оптических средах с насыщением. В этом случае вместо уравнения (2) следует для сред с дисперсией рассмотреть уравнение

$$\nabla^2 E-G\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)E=0, \tag{15}$$

где $$G\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{1}{c^2}\varepsilon\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{1}{c^2}\varepsilon_0\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{A}{c^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\lambda|\mathscr{E}|^2}}-1\right].$$

Как известно, для высоких частот наибольший порядок дают экспоненциальные множители $\exp(-i\omega t)$ в решении. Поэтому в нелинейном члене $i\partial/\partial t$ заменено на $\omega$ (3). В силу уравнения дисперсии волн (которое справедливо для любых сред) для удержания нелинейных вкладов от линейной части $G$ следует удержать члены с производным от амплитуды $\mathscr{E}$. Применяя формулу Лейбница к функции $\mathscr{E}\exp(-i\omega t)$ и удерживая главные порядки по $\omega$, можно показать, что

$$G_0\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathscr{E}e^{-i\omega t}\simeq e^{-i\omega t}\left[G_0(\omega)\mathscr{E}+i\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}G_0'(\omega)\right], \tag{16}$$

где $G_0(\omega)=-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0(\omega)$—линейная часть оператора $G$, а $G_0'=\partial G_0/\partial\omega$.

Используя новые обозначения, уравнение дисперсии запишется в форме $k^2=-G$. Тогда для групповой скорости волны можно записать:

$$\frac{\partial\omega}{\partial k}=-\frac{2k}{G_0'}.$$

Подставляя формулы (3), (16) в уравнение (15), можно показать, что имеет место уравнение

$$2ik\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial x}+2ik\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}+\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial y^2}+\frac{m}{y}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial y}+\frac{\varepsilon_0-1}{\varepsilon_0}k^2\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda|\mathscr{E}|^2}}-1\right)=0. \tag{17}$$

Вводя новую переменную $\xi=t-(\partial\omega/\partial k)^{-1}\cdot x$ и считая, что $\mathscr{E}(\xi, x, y)$ зависит от $t$, можно показать, что уравнение (17) сводится к (4), где $\mathscr{E}$ заменен на $\mathscr{E}'$, $\lambda$—на $\lambda\Phi^2(\xi)$, а $\mathscr{E}'(x, y)=\mathscr{E}/\Phi$.

Таким образом, все полученные формулы и выводы для стационарных гауссовых пучков остаются в силе и для импульсных пучков.

Следует отметить, что из полученных формул (7), (8) при малых значениях $|\mathcal{E}|^2$ получаются известные формулы для фокусных расстояний, при этом в фокусе $f=0$, а амплитуда бесконечна. Учет же насыщения в формуле (1) приводит к отличному от нуля $f_n$.

Отметим, что из уравнения (7) получается уточненное значение $z$, до которого пучок фокусируется:

$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda a_0^2}+1\right)^{-3/2}.$$

При этом значении $z$ и $f'(0)=0$ форма пучка не меняется.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Գ. Ս. ԲԵԶԻՐԳԵՆՅԱՆ

## Օպտիկական ճագեցված միջավայրում ճզոր լուսային ալիքների ֆոկուսացման մասին

*Դիտարկվում է հզոր նեղ լուսային փնջի ֆոկուսացման խնդիրը համասեռ միջավայրում, որի բևեռացումը հանդիսանում է ոչ գծային ֆունկցիա՝ գծային բևեռացված դաշտի լարվածությունից։ Առանցքասիմետրիկ փնջի իրական ամպլիտուդայի և ֆազայի համար ստացված են հավասարումներ, որոնց լուծումները փնտրվում են գաուսյան փնջերի տեսքով։*

*Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ իմպուլսային փնջերի կոմպլեքս ամպլիտուդայի համար ստացված հավասարումը կարելի է ձևափոխել ստացիոնար փնջի կոմպլեքս ամպլիտուդայի հավասարմանը։ Մասնավորապես, դաշտի փոքր լարվածության դեպքում ֆոկուսային հեռավորության համար ստացվում է նույն բանաձևը, որը բերված է [10]-ում։*

### ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Л. Тер-Микаелян*, Нелинейная резонансная оптика. Ч. 1, 2, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1974. [2] *С. Г. Зейгерт*, Теоретические основы лазерной спектроскопии насыщения. Изд-во ЛГУ. 1979. [3] *J. E. Bjokholm, P. W. Smith, W. J. Tomlinson*, IEEE, Quantum-Electronics. QE—18, p. 2016 (1982). [4] *F. T. Arecchi, E. O. Schulz-Du Bois*, Laser Handbook. Eds Amsterdam The Netherland North-Holland, p. 1151—1228 (1972). [5] *D. H. Close*, The Physical Review, v, 153, p. 360 (1967). [6] *Wagner*, The Physical Review, v. 165, № 1 (1968). [7] *A. E. Kaplan*, Opt. Lett., v. 6, p. 360—362 (1981). [8] *J. H. Marburger, F. S. Felber*, The Physical Review, v. 17, № 1 (1978). [9] *А. Г. Багдоев*, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 33, № 1 (1980). [10] *А. Г. Багдоев, Г. С. Безиргенян*, ДАН АрмССР. т. 79, № 1 (1984).