

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Член-корреспондент АН Армянской ССР Б. Л. Абрамян, Г. З. Геворкян

Несимметричная задача о распространении упругих волн в пространстве с цилиндрической полостью

(Представлено 6/V 1986)

В работе исследуется распространение упругих волн в упругом пространстве с круглой цилиндрической полостью, когда возбуждающая колебания динамическая нагрузка направлена перпендикулярно к оси полости и приложена в одной точке внутри пространства на конечном расстоянии от полости.

При решении задачи используются преобразования Лапласа, Вебера—Орра и Фурье.

1. *Постановка задачи.* Решение задачи строится в цилиндрической системе координат при помощи скалярной и векторной потенциальных функций  $\Phi$  и  $\bar{\Psi}$ . Основные уравнения, которым удовлетворяют функции  $\Phi$  и  $\Psi_s$  ( $s=r, \varphi, z$ ), приводятся в работах (<sup>1,2</sup>). За плоскость  $z=0$  берем плоскость, проходящую через точку приложения сосредоточенной силы  $Qf(t)$ . Ось  $Oz$  совпадает с осью полости.  $r_0, 0, 0$ —точка приложения силы.

В силу симметрии деформации относительно плоскости  $z=0$  граничные условия берем в следующем виде:

$$u_z(r, \varphi, 0, t) = \tau_{z\varphi}(r, \varphi, 0, t) = 0, \quad \tau_{rz}(r, \varphi, 0, t) = -\frac{Q}{2} f(t) \frac{\delta(r-r_0)\delta(\varphi)}{r}, \quad (1)$$

где  $Q$ —амплитуда силы,  $f(t)$ —временная функция, определяющая вид динамической нагрузки,  $r_0$ —расстояние до оси полости,  $\delta(s)$ —дельта-функция Дирака.

Поверхность полости берется свободной от напряжений:

$$\sigma_r(R, \varphi, z, t) = \tau_{rz}(R, \varphi, z, t) = \tau_{r\varphi}(R, \varphi, z, t) = 0, \quad (2)$$

где  $R$ —радиус полости.

Осевые плоскости  $\varphi=0$  и  $\varphi=\pi$  также являются плоскостями симметрии деформации и на этих плоскостях имеют место условия

$$u_\varphi|_{\varphi=0,\pi} = \tau_{\varphi z}|_{\varphi=0,\pi} = \tau_{r\varphi}|_{\varphi=0,\pi} = 0, \quad (3)$$

где угол  $\varphi$  отсчитывается от направления действия динамической нагрузки.

Для решения задачи с условиями (1)—(3) перемещения представим в виде рядов

$$u_s = \sum_{m=0}^{\infty} u_s^{(m)}(s=r, \varphi, z), \quad u_r^{(m)} = u_m \cos m\varphi, \quad u_\varphi^{(m)} = v_m \sin m\varphi, \quad u_z^{(m)} = w_m \cos m\varphi. \quad (4)$$

Рядами представляются также и напряжения.

Соответствующим образом потенциальные функции берем в виде следующих рядов:

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m, \quad \Psi_r = \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_r^{(m)}, \quad \Psi_s = \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_s^{(m)} \quad (s=r, z), \quad (5)$$

где  $\Phi_m$  и  $\Psi_s^{(m)}$  ( $s=r, \varphi, z$ ) берутся в виде, который указан в работе (2). Отметим здесь, что в работе (2) допущена неточность — не указывается; что приведенные представления  $\Phi_m$  и  $\Psi_s^{(m)}$  являются порядковыми членами соответствующих рядов (5). В работе (2) в условиях (3), (5), (7) и (18) пропущен также множитель  $\frac{1}{r}$ , а в выражениях (19)–(21) и дальше при членах, содержащих нагрузки  $P\bar{f}_1(\xi)$  и  $Q\bar{f}_2(\xi)$ , пропущены множители  $\frac{1}{r_0}$ .

Функции  $\varphi_m(r, z, t)$  и  $\psi_s^{(m)}(r, z, t)$ , входящие в  $\Phi_m$  и  $\Psi_s^{(m)}$ , удовлетворяют уравнениям

$$\left(\nabla_m^2 - a^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Phi_m = \left(\nabla_m^2 - b^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi_z^{(m)} = \left(\Delta_1^2 - b^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi_\varphi^{(0)} = 0; \quad (6)$$

$$\left(\nabla_{m-1}^2 - b^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi_1^{(m)} = \left(\nabla_{m+1}^2 - b^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi_2^{(m)} = 0;$$

$$\text{где} \quad \nabla_s^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{s^2}{r^2}, \quad a^2 = \rho/(\lambda + 2G), \quad b^2 = \rho/G,$$

и нулевым начальным условиями.

Для решения задачи эти функции представляются в виде суммы интегралов Лапласа—Вебера и Лапласа—Фурье.

Представляя функцию  $\delta(\varphi)$  в виде ряда Фурье по функциям  $\{\cos m\varphi\}$  на интервале  $(0, \pi)$  и используя условия (1) и (2) (представлениями (4) условия (3) удовлетворяются тождественно), будем иметь:

$$w_m(r, 0, t) = 0, \quad \tau_{rz}^{(m)}(r, 0, t) \pm \tau_{z\varphi}^{(m)}(r, 0, t) = -\frac{Qk_m}{\pi} f(t) \frac{\delta(r-r_0)}{r}, \quad (7)$$

$$\text{где} \quad \left(m=0, 1, 2, \dots; k_0 = \frac{1}{2}, k_m = 1 \text{ при } m \neq 0\right)$$

$$\tau_r^{(m)}(R, z, t) = \tau_{rz}^{(m)}(R, z, t) = \tau_{r\varphi}^{(m)}(R, z, t) = 0. \quad (8)$$

2. *Определение неизвестных функций-коэффициентов интегрирования.* Для каждой гармоники неизвестные функции-коэффициенты определяются отдельно. Для нулевой гармоники перемещения имеют вид:

$$u_0(r, z, t) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} - \frac{\partial \psi_\varphi^{(0)}}{\partial z}, \quad w_0(r, z, t) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{\partial \psi_\varphi^{(0)}}{\partial r} + \frac{\psi_\varphi^{(0)}}{r}. \quad (9)$$

где  $\varphi_0$  и  $\varphi_0^{(0)}$  берутся в виде

$$\varphi_0(r, z, t) = \frac{1}{2\pi l} \int_{c-l\infty}^{c+l\infty} e^{iz} dz \left\{ \int_0^\infty \beta \bar{\varphi}_0 W_0(\beta r) d\beta + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{\varphi}_0 \cos \gamma z d\gamma \right\}; \quad (10)$$

$$\varphi_0^{(0)}(r, z, t) = \frac{1}{2\pi l} \int_{c-l\infty}^{c+l\infty} e^{iz} dz \left\{ \int_0^\infty \beta \bar{\varphi}_0^{(0)} W_1(\beta r) d\beta + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{\varphi}_0^{(0)} \sin \gamma z d\gamma \right\}. \quad (11)$$

Здесь  $W_n(\beta r) = J_n(\beta r) Y_1(\beta R) - Y_n(\beta r) J_1(\beta R); \quad (12)$

$$\bar{\varphi}_0(\beta, z, \xi) = B^{(0)}(\beta, \xi) e^{-z\sqrt{\beta^2 + a^2 \xi^2}}, \quad \bar{\varphi}_0(r, \gamma, \xi) = D^{(0)}(\gamma, \xi) K_0(\mu_a r); \quad (13)$$

$$\bar{\varphi}_0^{(0)}(\beta, z, \xi) = B_\varphi^{(0)}(\beta, \xi) e^{-z\sqrt{\beta^2 + b^2 \xi^2}}, \quad \bar{\varphi}_0^{(0)}(r, \gamma, \xi) = D_\varphi^{(0)}(\gamma, \xi) K_1(\mu_b r); \quad (14)$$

$J_n(x)$  и  $Y_n(x)$  — функции Бесселя от действительного аргумента соответственно первого и второго рода,  $K_n(x)$  — функция Бесселя от мнимого аргумента второго рода,  $\mu_a = \sqrt{\gamma^2 + a^2 \xi^2}$ ,  $\mu_b = \sqrt{\gamma^2 + b^2 \xi^2}$ .

Вычисляя напряжения  $\sigma_r^{(0)}$  и  $\tau_{rz}^{(0)}$  и удовлетворяя граничным условиям (7) и (8), для случая  $m=0$  получаем

$$B^{(0)}(\beta, \xi) [J_1^2(\beta R) + Y_1^2(\beta R)] = -\frac{Q}{2\pi G} \cdot \frac{\bar{f}(\xi) \beta W_1(\beta r_0)}{b^2 \xi^2 \sqrt{\beta^2 + a^2 \xi^2}}; \quad (15)$$

$$B_\varphi^{(0)}(\beta, \xi) [J_1^2(\beta R) + Y_1^2(\beta R)] = -\frac{Q}{2\pi G} \frac{\bar{f}(\xi) W_1(\beta r_0)}{b^2 \xi^2}.$$

Здесь  $\bar{f}(\xi) = \int_0^\infty f(t) e^{-i\xi t} dt$ . Используя значения (15), будем иметь также

$$D^{(0)}(\gamma, \xi) K_1(\mu_a R) = -\frac{(b^2 \xi^2 + 2\gamma^2) F_0(\gamma, \xi)}{\Delta_R^{(0)}(\gamma, \xi)}; \quad (16)$$

$$D_\varphi^{(0)}(\gamma, \xi) K_1(\mu_b R) = \frac{2\gamma \mu_a F_0(\gamma, \xi)}{\Delta_R^{(0)}(\gamma, \xi)},$$

где введены обозначения

$$F_0(\gamma, \xi) = \frac{2Q}{\pi^2 R G} \cdot \frac{\bar{f}(\xi)}{b^2 \xi^2} \int_0^\infty \frac{\beta W_1(\beta r_0) d\beta}{J_1^2(\beta R) + Y_1^2(\beta R)} \left[ \frac{\gamma}{1-2\nu} \frac{a^2 \xi^2 - \beta^2}{\beta^2 + \mu_a^2} + \frac{b^2 \xi^2 + \beta^2}{\beta^2 + \mu_b^2} \right]; \quad (17)$$

$$\Delta_R^{(0)}(\gamma, \xi) = 4\gamma^2 \mu_a \mu_b \frac{K_0(\mu_b R)}{K_1(\mu_b R)} - (b^2 \xi^2 + 2\gamma^2) \frac{K_0(\mu_a R)}{K_1(\mu_a R)} - \frac{2b^2 \xi^2 \mu_a}{R}. \quad (18)$$

Определение неизвестных функций-коэффициентов интегрирования для других гармоник производится аналогичным образом и для шести искомых коэффициентов интегрирования получаются замкнутые выражения, подобные выражениям (15) и (16).

Уравнение  $\Delta_R^{(0)}(\gamma, \xi) = 0 \quad (19)$



является уравнением, подобным уравнению Релея.

Уравнение (19) впервые было получено в работе (3).

При определении перемещений на поверхности цилиндрической полости должны быть учтены корни этого уравнения, и с его помощью можно определить скорость распространения поверхностных волн на поверхности полости в упругой среде.

Для первой гармоники уравнение, определяющее фазовую скорость распространения поверхностной волны по поверхности полости, имеет вид:

$$\Delta_{\mathcal{R}}^{(1)}(\gamma, \xi) = 0, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{R}}^{(1)}(\gamma, \xi) = & 4\gamma^2 \mu_a \mu_b \frac{K_1(\mu_b R)}{K_2(\mu_b R)} - (2\gamma^2 + b^2 \xi^2)^2 \frac{K_1(\mu_a R)}{K_2(\mu_a R)} - \frac{2(b^2 \xi^2 - 4\gamma^2) \mu_a}{R} - \\ & - \frac{2(2\gamma^2 + b^2 \xi^2)^2}{\mu_b R} \cdot \frac{K_1(\mu_a R) K_2(\mu_b R)}{K_2(\mu_a R) K_1(\mu_b R)} + \frac{b^4 \xi^4}{\mu_b R} \cdot \frac{K_1(\mu_a R) K_1(\mu_b R)}{K_2(\mu_a R) K_2(\mu_b R)} + \quad (21) \\ & + \frac{2b^2 \xi^2 (b^2 \xi^2 - \gamma^2)}{R^2 \mu_b^2} \cdot \frac{K_1(\mu_a R)}{K_2(\mu_a R)} + \frac{2b^2 \xi^2 \mu_a}{R^2 \mu_b} \cdot \frac{K_1(\mu_b R)}{K_2(\mu_b R)}. \end{aligned}$$

При численном решении уравнений (19) и (20) для гармонической нагрузки выяснилось, что фазовые скорости распространения поверхностных волн по поверхности цилиндрической полости всегда больше скорости распространения поверхностных волн по плоской поверхности.

В табл. 1 приводятся значения отношений фазовых скоростей  $s = \frac{c}{c_2}$  ( $c$ —скорость распространения волн по поверхности цилиндрической полости,  $c_2$ —скорость распространения сдвиговой волны), вычисленные для различных значений коэффициента Пуассона и параметра  $m_0 = \frac{R\omega}{c_2}$  ( $\omega$ —частота колебаний,  $R$ —радиус полости).

При некотором критическом значении параметра  $m_0$  скорость распространения волн по поверхности полости становится равной

Таблица 1

| $\gamma$ | $n$ | $m_0$ |       |       |       |       |
|----------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
|          |     | 5     | 10    | 20    | 40    | 80    |
| 0        | 0   | 0,927 | 0,899 | 0,886 | 0,878 | 0,877 |
|          | 1   |       |       | 0,886 | 0,879 | 0,877 |
| 0,25     | 0   | 0,953 | 0,934 | 0,926 | 0,922 | 0,921 |
|          | 1   |       |       | 0,926 | 0,922 | 0,921 |
| 0,33     | 0   | 0,961 | 0,944 | 0,937 | 0,934 | 0,933 |
|          | 1   |       |       | 0,938 | 0,934 | 0,933 |
| 0,5      | 0   | 0,975 | 0,963 | 0,958 | 0,957 | 0,956 |
|          | 1   |       |       | 0,959 | 0,957 | 0,956 |

скорости распространения сдвиговых волн. В табл. 2 приводятся критические значения параметра  $m_0$ , найденные для первой и нулевой гармоник.

Таблица 2

| n | $\gamma$ |      |      |      |
|---|----------|------|------|------|
|   | 0        | 0,25 | 0,33 | 0,5  |
| 0 | 1,88     | 2,07 | 2,15 | 2,39 |
| 1 | 13,9     | 15,7 | 16,5 | 18,8 |

Подобные результаты при исследовании одной осесимметричной задачи были получены в работе <sup>(3)</sup>, а в условиях плоской задачи — в работе <sup>(4)</sup>.

Институт механики  
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ քրդակից անդամ Բ. Լ. ԱՐՐԱՀԱՄՅԱՆ, Գ. Զ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Գլանային խոռոչով տարածության մեջ առաձգական ալիքների տարածման վերաբերյալ ոչ սիմետրիկ խնդիրը

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է գլանային անցք ունեցող անվերջ տարածության մեջ առաձգական ալիքների տարածման ոչ սիմետրիկ խնդիրը, երբ ալիքներն առաջանում են խոռոչից վերջավոր հեռավորության վրա գտնվող տարածության մի կետում կիրառված դինամիկ ուժային աղբյուրի ազդեցության շնորհիվ:

Խնդրի լուծման ընթացքում օգտագործվում են Լապլասի, Վեբերի-Օրի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունները:

Լուծումը կառուցվում է շարքի տեսքով: Ուսումնասիրվել են շարքի զրոյական և առաջին հարմոնիկների համար ալիքային հավասարումները: Որոշվել են այդ հարմոնիկների համար խոռոչի գլանային մակերևույթի վրայով տարածվող ալիքների ֆազային արագությունները, որոնք մեծ են հարթ մակերևույթի վրա մակերևույթային ալիքների տարածման արագությունից և փոքր են աղավաղման ալիքների տարածման արագությունից:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> J. D. Achenbach, Wave propagation in Elastic Solids, North-Holland Publ. Co. Amsterdam, 1973. <sup>2</sup> Б. Л. Абрамян, ДАН АрмССР, т. 81, № 3 (1985). <sup>3</sup> M. Biot, Journal of Appl. Physics, v. 23, № 9 (1952). <sup>4</sup> И. А. Вукторов, Акустический журн., т. 4, № 2 (1958).