ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 2

УДК 534.26

МЕХАНИКА

Р. А. Багдасарян, К. Б. Казарян

Изгибные поверхностные волны в ортотропной пластинке

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 29/I 1986)

Как известно ([1,2]), в тонкой полубесконечной изотропной пластинке вдоль свободного края может распространяться изгибная волна, являющаяся аналогом волны Рэлея ([3]). В работе ([4]) были изучены также изгибные волны типа Стоунли ([5]), бегущие по линии контакта двух тонких изотропных пластин и сосредоточенных вблизи нее.

Здесь рассматриваются свободные изгибные колебания ортотропной полубесконечной пластинки со свободным краем и ставится вопрос исследования поверхностных волн, т. е. волн, распространяющихся вдоль свободного прямолинейного края и затухающих при удалении от границы.

Отнесем ортотропную пластинку к прямоугольной декартовой системе координат (X, Y, Z). В этой системе срединная плоскость пластинки занимает область $-\infty<x<\infty$, $0\leqslant y<\infty$.

Дифференциальное уравнение колебания ортотропной прастинки и граничные условия задачи имеют вид ([6])

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{2(B_{12}+2B_{66})}{B_{22}}\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{B_{11}}{B_{22}}\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{12\rho}{B_{22}h^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{B_{12}}{B_{22}}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\\&\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}}\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}=0,\end{aligned}\right|\ y=0. \tag{2}$$

Здесь $w(x, y, t)$—нормальный прогиб пластинки, B_{ik}—коэффициенты упругости ([6]), ρ—плотность материала, h—толщина пластинки.

Решение уравнения (1) ищем в виде плоской монохроматической волны

$$w(x, y, t)=e^{ry}\cdot e^{i(\omega t-kx)}, \tag{3}$$

где k—волновое число, ω—частота колебаний.

Для корней характеристического уравнения имеем $r=\pm\frac{k}{\sqrt{B_{22}}}\sqrt{b_1\pm\sqrt{c_1}}$, где

$$\begin{gathered}b_1=B_{12}+2B_{66}>0,\quad c_1=d_1+(\lambda_0/k)^4B_{22}^2,\\d_1=(B_{12}+2B_{66})^2-B_{11}B_{22},\quad \lambda_0=(12\rho\omega^2/B_{22}h^2)^{1/4}.\end{gathered} \tag{4}$$

Из общего решения (3) выберем только то решение, которому соответствует поверхностная волна. Для этого рассмотрим три случая: $c_1>0$, $c_1<0$ и $c_1=0$. Как известно (*), для всех ортотропных материалов $d_1<0$. Тогда очевидно, что если

$$c_1>0, \quad b_1>\sqrt{c_1}, \tag{5}$$

то решение уравнения (1), представляющее собой поверхностную изгибную волну, можно представить в виде

$$w(x, y, t)=(A_1 e^{r_1 y}+A_2 e^{r_2 y}) \cdot e^{i(\omega t-kx)}, \tag{6}$$

где $r_{1,2}=-k\sqrt{(b_1\pm\sqrt{c_1})/B_{22}}$. При этом из (5) имеем, что

$$\sqrt[4]{\frac{B_{22}}{B_{11}}}<\frac{k}{\lambda_0}<\sqrt[4]{\frac{B_{12}^2}{B_{11}B_{22}-(B_{12}+2B_{66})^2}}. \tag{7}$$

Подставляя (6) в (2), относительно A_1 и A_2 получим систему уравнений, условие разрешимости которой имеет вид:

$$\sqrt{b_1+\sqrt{c_1}}\,(2B_{66}-\sqrt{c_1})^2=\sqrt{b_1-\sqrt{c_1}}\,(2B_{66}+\sqrt{c_1})^2. \tag{8}$$

Легко показать, что в интервале

$\sqrt[4]{\dfrac{B_{22}}{B_{11}}}<\dfrac{k}{\lambda_0}<\sqrt[4]{\dfrac{B_{12}^2}{B_{11}B_{22}-(B_{12}+2B_{66})^2+4B_{66}^2}}$ существует решение уравнения (8), которое удовлетворяет условию (7). Упростив уравнение (8) получим:

$$c_1^2-8B_{66}(B_{12}-B_{66})c_1-16B_{66}^2(2B_{12}+3B_{66})=0. \tag{9}$$

Решения уравнения (9) имеют вид:

$$\begin{aligned} c_1^{(1)}&=4B_{66}(B_{12}-B_{66}+\sqrt{B_{12}^2+4B_{66}^2})>0,\\ c_1^{(2)}&=4B_{66}(B_{12}-B_{66}-\sqrt{B_{12}^2+4B_{66}^2})>0. \end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя значение $c_1^{(1)}$ из (10) в соответствующую формулу (4), получим уравнение относительно величины k/λ_0, действительное решение которого, удовлетворяющее условию (7), имеет вид:

$$\frac{k}{\lambda_0}=\left[\frac{B_{12}^2}{B_{11}B_{22}+4B_{66}\sqrt{B_{12}^2+4B_{66}^2}-8B_{66}^2-B_{12}^2}\right]^{1/4} \tag{11}$$

Если же $c_1<0$, т. е. при

$$\frac{k}{\lambda_0}>\left[\frac{B_{12}^2}{B_{11}B_{22}-(B_{12}+2B_{66})^2}\right]^{1/4} \tag{12}$$

два решения характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части. Эти решения имеют вид: $r_{3,4}=-k(\alpha_1\pm i\alpha_2)/\sqrt{B_{22}}$,

где $\alpha_{1,2}=\left[\dfrac{\sqrt{b_1^2+e_1^2}\pm b_1}{2}\right]^{1/2}>0, \quad e_1=\sqrt{-c_1}$.

Следовательно, при $c_1<0$ решение уравнения (1), соответствующее поверхностной волне, имеет вид: $w(x, y, t)=(A_3 e^{r_3 y}+A_4 e^{r_4 y}) \cdot e^{i(\omega t-kx)}$. Уравнение, аналогичное дисперсионному уравнению (8), имеет вид:

$$4\alpha_1 e_1 B_{66}=\alpha_2(4B_{66}^2-e_1^2),$$

что можно представить в виде

$$[4B_{66}(\sqrt{b_1^2+z}+b_1)]^2=(4B_{66}^2-z)^2, \tag{13}$$

где $z=e_1^2=-c_1>0$. Учитывая, что $4B_{66}^2-z>0$, из (13) получим:

$$z+4B_{66}\sqrt{b_1^2+z}+4B_{12}B_{66}+4B_{66}^2=0. \tag{14}$$

Ясно, что уравнение (14) не имеет решений. В случае $c_1=0$, т. е. при $\frac{k}{\lambda_0}=\left[\frac{B_{22}^2}{B_{11}B_{22}-(B_{12}+2B_{66})^2}\right]^{1/4}$ для решения уравнения (1), соответствующего поверхностной волне, получим:

$$w(x, y, t)=(A_5+A_6y)\cdot e^{r_5y}\cdot e^{i(\omega t-kx)}, \tag{15}$$

где $r_5=-k\sqrt{(B_{12}+2B_{66})/B_{22}}$.

Подставляя (15) в (2), получим систему уравнений относительно A_5, A_6. Определитель этой системы отличен от нуля, следовательно $A_5=A_6=0$. Таким образом приходим к выводу, что не существует изгибной поверхностной волны, удовлетворяющей следующему условию: $\frac{k}{\lambda_0}\geqslant\left[\frac{B_{22}^2}{B_{11}B_{22}-(B_{12}+2B_{66})^2}\right]^{1/4}$, $(c_1\leqslant 0)$.

Искомое соотношение (11) для фазовой скорости поверхностной изгибной волны удобно представить в следующем виде:

$$\frac{v}{c}=\left[\bar{B}_{11}\bar{B}_{22}+4\bar{B}_{66}\sqrt{\bar{B}_{12}^2+4\bar{B}_{66}^2}-8\bar{B}_{66}^2-\bar{B}_{12}^2)/\bar{B}_{22}\right]^{1/4}, \tag{16}$$

где $v=\omega/k$—фазовая скорость поверхностной волны, $c=B_{11}^0h^2k^2/12\rho$—фазовая скорость одномерной изгибной волны, распространяющейся вдоль оси OX при $\varphi=0^0$, $\bar{B}_{ik}=B_{ik}/B_{11}^0$, φ—угол между главными физическими и геометрическими направлениями композиционного материала.

Материал	φ						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
СВАМ 5:1	0,999	0,962	0,870	0,783	0,754	0,751	0,734
Боропластик	0,999	0,942	0,782	0,585	0,417	0,332	0,316
Стеклопластик	0,999	0,961	0,858	0,734	0,636	0,588	0,577

В таблице для различных ортотропных материалов в зависимости от угла армирования φ композиционного материала приведены значения безразмерной фазовой скорости изгибной поверхностной волны. Как видно из таблицы, минимальное значение безразмерной скорости достигается при $\varphi=90°$. Отметим также, что в отличие от изотропной пластинки, здесь безразмерная фазовая скорость существенно отличается от единицы.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ա. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ծռման մակերևութային ալիքներն օրթոտրոպ սալում

Աշխատանքում դիտարկված է ազատ եզրով կիսանվերջ օրթոտրոպ նյութից պատրաստված սալի տատանումների խնդիրը և դրված է մակերևութային ալիքների ուսումնասիրման հարցը։

Տարբեր կոմպոզիցիոն նյութերից պատրաստված սալերի համար գտնված են ծռման մակերևութային ալիքի ֆազային արագության արժեքները և ցույց է տրված, որ ի տարբերություն իզոտրոպ սալի, այդ արագությունները կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված սալերում էապես փոքր են ծավալային արագությունների համապատասխան արժեքներից։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. К. Коненков*, Акуст., т. 6. с. 124—126 (1960). [2] *Л. М. Бреховских, В. В. Гончаров*, Введение в механику сплошных сред, Наука, М., 1982. [3] *В. Новацкий*. Теория упругости. Мир, М., 1975. [4] *А. С. Зильберглейт И. Б. Суслова*. в кн.: Исследования по механике твердого деформируемого тела. Изд-во АН АрмССР. Ереван. 1981. [5] *R. Stonely*, Proceedings of the Royal Society S. A., v. 106, № A73, p. 416—428 (1924). [6] *С. А. Амбарцумян*, Общая теория анизотропных оболочек, Наука, М, 1974. [7] *С. Г. Лехницкий*, Теория анизотропного тела, Наука, М., 1977.