ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXIII 1986 2

УДК 517.52

МАТЕМАТИКА

С. Ш. Галстян

О расходящихся рядах Фурье по равномерно ограниченным ортонормированным системам

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 7/IV 1986)

В 1923 г. А. Н. Колмогоров (см. ([1]), с. 8, ([2]), с. 391, ([3])) построил почти всюду расходящийся ряд Фурье по тригонометрической системе.

Этот результат уточнялся в дальнейшем Марцинкевичем (см. ([2]), с. 391). Он доказал, что ряд Фурье может ограниченно расходиться почти всюду, то есть мажоранта модуля частных сумм ряда Фурье конечна почти всюду.

Ж. П. Кахан (см. ([4]), с. 171) доказал, что для любой положительной функции $\psi(t)$, $\psi(t)=o(\log\log t)$ при $t\to\infty$ и подпоследовательности $n_1<n_2<\ldots$ натуральных чисел существует такая интегрируемая функция $F(x)$, что $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\dfrac{|S_{n_k}(x, F)|}{\psi(k)}=\infty$ почти всюду. Здесь $S_n(x, F)$—n-я частичная сумма ряда Фурье функции F по тригонометрической системе. При $n_k=k$ этот результат принадлежит Чену ([5]). В. И. Прохоренко ([6]) построил интегрируемую функцию $F(x)$ с $\omega_1(\delta, F)=O\left(1/\log\log\dfrac{1}{\delta}\right)$, ряд Фурье которой расходится почти всюду. Из этого результата и одной теоремы вложения П. Л. Ульянова ([7]) в частности следует, что функция $F(x)$ принадлежит классу $L(\log^+\log^+L)^\beta$ для любого $\beta\in(0, 1)$. Существование функции $F\in L(\log^+\log^+L)^\beta$ для любого $\beta\in(0, 1)$ с расходящимся почти всюду рядом Фурье установлено также Ченом ([8]) (см. также Тандори ([9])).

И. Стейн ([10]) распространил результат А. Н. Колмогорова на систему Уолша.

В 1975 г. С. В. Бочкарев ([11]) показал, что для любой равномерно ограниченной ортонормированной системы на [0,1] существует интегрируемая функция, ряд Фурье которой по этой системе неограниченно расходится на множестве положительной меры. Как показал К. С. Казарян ([12]), в примере С. В. Бочкарева добиться расходимости почти всюду невозможно, даже когда система полна и ограниченна. Для более подробного знакомства с результатами, примыкающими к примеру А. Н. Колмогорова, можно воспользоваться работой П. Л. Ульянова ([3]).

Нами получены следующие результаты.

Теорема 1. *Существует функция* $F(x)\in L^1(0, 2\pi)$ *такая, что*

а) $S_n(x, F)$ *сходится к* $F(x)$ *в метрике* L^1,

б) $\{\hat{F}(n)\}\in\bigcap\limits_{q>2} l^q$, в) $\operatorname{mes}\{x: S^*(x, F)>y\}=O(1/y\log\log y)$ *при* $y\to\infty$ *и последовательность* $S_n(x, F)$ *расходится почти всюду.*

Здесь $\hat{F}(n)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(t)e^{-int}dt$, $S^*(x, F)=\sup\limits_n |S_n(x, F)|$.

Из условия в) следует, что $S^*(x, F)\in\bigcap\limits_{p<1} L^p$.

Теорема 2. *Пусть* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— равномерно ограниченная ортонормированная система на* $[0, 1]$. *Тогда*

1) *для любой положительной функции* $\varphi(t)=o(t\log\log\log\log t)$ *существует интегрируемая функция* $F(x)$ *с* $\int\limits_0^1 \varphi(|F(x)|)dx<\infty$ *такая, что* $\tilde{S}_n(x, F)$ *неограниченно расходится на множестве положительной меры;*

2) *для любой положительной функции* $\psi(t)=o(\log\log t)$ *существует функция* $F(x)\in L^1(0, 1)$ *такая, что* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tilde{S}_n(x, F)}{\psi(n)}=\infty$ *на множестве положительной меры* $\left(\tilde{S}_n(x, F)=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(F)\, f_k(x),\right.$ *где*

$$\left. a_k(F)=\int\limits_0^1 F(x)f_k(x)dx\right).$$

Для тригонометрической системы и для системы Уолша имеет место более точный результат.

Теорема 3. *Пусть* $\{g_k\}$ *— тригонометрическая система или система Уолша. Тогда для любой перестановки* σ *натурального ряда существует интегрируемая функция* $F(x)$, $\omega_1(\delta, F)=O\left(1/\log\log\frac{1}{\delta}\right)$ *такая, что* $S_n^{(\sigma)}(x, F)$ *расходится почти всюду* ($S_n^{(\sigma)}(x, F)$ *— n-я частичная сумма ряда Фурье функции* F *по переставленной системе* $\{g_{\sigma(k)}\}$.

При доказательстве теорем 2 и 3 мы используем также методы работы ([11]).

Основным моментом доказательства теоремы 2 является следующая

Лемма. *Пусть* $\{f_k\}$ *— ортонормированная система на* $[0, 1]$, *удовлетворяющая условиям* $\|f_k\|_\infty\leqslant M$, $k=1, 2, \ldots$. *Тогда для любого натурального* N *существует функция* $F_N(x)$ *со следующими свойствами:*

а) $F_N(x)=0$ *или* $N\leqslant\log\log F_N(x)\leqslant N^2$ *для любого* $x\in[0, 1]$,

б) $\int\limits_0^1 F_N(x)dx\leqslant 1$,

в) *существует множество* $E\subset[0, 1]$ *с* $\operatorname{mes} E\geqslant C(M)$, $C(M)$ *— постоянная, зависящая только от* M, *такое, что для любой точки* $t\in E$ *существует* $n=n(t)$ *со свойствами:*

1) $\log n(t) \leqslant N^{3}$,

2) $S_{n(t)}(t, F_N) \geqslant B \log N$ ($B > 0$ *и зависит только от* M).

В заключение автор приносит свою благодарность П. Л. Ульянову, под руководством которого выполнена эта работа.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Ս. Շ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ

Հավասարաչափ սահմանափակ օրթոնորմավորված համակարգերով տարամետ Ֆուրյեի շարքերի մասին

Հոդվածում կառուցվում են ինտեգրելի ֆունկցիաներ տարամետ Ֆուրյեի շարքերով։ Ստացված է հետևյալ պնդումը։

Թեորեմ. Թող $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ լինի հավասարաչափ սահմանափակ օրթոնորմավորված համակարգ $[0, 1]$ հատվածի վրա։ Այդ դեպքում

1) Կամայական դրական $\varphi(t) = o(t \log\log\log t)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $F(x)$ ինտեգրելի ֆունկցիա, վերջավոր $\int_0^1 \varphi(|F(x)|)$ ինտեգրալով, այնպես, որ $\tilde{S}_n(x, F)$ անսահմանափակ տարամիտում է դրական չափի բազմության վրա։

2) Կամայական դրական $\psi(t) = o(\log\log t)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $F(x) \in L^1(0, 1)$ ֆունկցիա, այնպես, որ $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\tilde{S}_n(x, F)}{\psi(n)} = \infty$ դրական չափի բազմության վրա $\left(\tilde{S}_n(x, F) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(F) f_k(x),\right.$ որտեղ $a_k(F) = \left.\int_0^1 F(x) f_k(x)\, dx\right)$։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Н. Колмогоров*, Избранные труды, Математика и механика, т. 1, Наука, М., 1985. [2] *Н. К. Бари*, Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961. [3] *П. Л. Ульянов*, Успехи мат. наук, т. 38, № 4 (1983). [4] *Ж. П. Кахан*, Случайные функциональные ряды, Мир, М., 1984. [5] *Y. M. Chen*, Arch. der Math., v. 4, № 2 (1963). [6] *В. И. Прохоренко*, Мат. сб., т. 75 (1968). [7] *П. Л. Ульянов*, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 32, № 3 (1968). [8] *Y. M. Chen*, J. London Math. Soc, v. 44, № 4 (1969). [9] *K. Tandori*, Acta sci math, v. 30 (1969). [10] *E. M. Stein*, Annals of Math., v. 74, № 1 (1961). [11] *С. В. Бочкарев*, Мат. сб., т. 98, № 3 (1975). [12] *К. С. Казарян*, Мат. сб., т. 119, № 2 (1982).