УДК 512.776

МАТЕМАТИКА

С. Г. Далалян

О касательном расслоении дискриминантного многообразия

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 10/IV 1985)

Пусть V —линейное пространство размерности n над алгебраически замкнутым полем k характеристики нуль, V^* —двойственное пространство, $L_s(V) = (V^*)^s$ —пространство s -линейных форм на V . Симметрическая группа Σ_s действует на $L_s(V)$, переставляя переменные s -линейной формы. Инвариантные относительно действия Σ_s формы образуют пространство $\text{Sym}_s(V^*)$ симметрических s -линейных форм.

Пусть $\delta: V \rightarrow V^s$ —диагональное вложение, $L_s(V)|_{\delta(V)}$ —пространство форм степени s на V . Оно изоморфно $\text{Sym}_s(V^*)$ и отождествляется с ним посредством диагонального вложения.

Существует каноническое отображение $d^t: \text{Sym}_s(V^*) \times V \rightarrow \text{Sym}_t(V^*)$ для любого неотрицательного целого $t \leq s$. Если $(e_1, \dots, e_n)$ —базис пространства V , $(x^1, \dots, x^n)$ —дуальный базис пространства V^* , то точке (φ, ξ) тотального пространства $\text{Sym}_s(V^*) \times V$ сопоставляется форма

$$d_{\xi}^t \varphi = \sum \frac{\partial^t \varphi}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_t}} (\xi) x^{i_1} \dots x^{i_t} \in \text{Sym}_t(V^*),$$

которая, как нетрудно проверить, инвариантна относительно выбора базиса.

Обозначим через A_s пространство $\text{Sym}_{s_1}(V^*) \times \dots \times \text{Sym}_{s_m}(V^*)$ систем форм $f = (f_1, \dots, f_m)$ мультистепеней $s = (s_1, \dots, s_m)$. Будем считать, что множество мультистепеней упорядочено по координатно. Для любой мультистепеней $t = (t_1, \dots, t_m) \leq s$ определено отображение $d^t: A_s \times V \rightarrow A_t \mid d^t(\varphi, \xi) = (d_{\xi}^{t_1} \varphi_1, \dots, d_{\xi}^{t_m} \varphi_m) = d_{\xi}^t \varphi$. Взяв $t = 1 = (1, \dots, 1)$, получим отображение $d = d^1: A_s \times V \rightarrow (V^*)^m = A_1$.

Пусть $P(V) = P^{n-1}$ —проективизация пространства V , X_{φ} —множество нулей системы $\varphi \in A_s$ в P^{n-1} . Коразмерность подпространства $X_{d(\varphi, \xi)}$ называется рангом точки (φ, ξ) или системы φ в ξ . Очевидно, коразмерность $X_{d(\varphi, \xi)}$ равна рангу якобиевой матрицы

$$\mathcal{J}(\varphi, \xi) = \left\| \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right\|_{i=1, \dots, n}^{k=1, \dots, m}$$

. Обозначив через $\mathfrak{S}_l$ множество точек тотального пространства $A_s \times P(V)$, имеющих ранг $\leq l$, где $l = \min(m, n)$, получим фильтрацию

$$A_s \times P(V) = \mathfrak{S}_0 \supset \mathfrak{S}_1 \supset \mathfrak{S}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{S}_e. \tag{1}$$

Пусть $\mathcal{L}$ —множество точек $(\varphi, \xi) \in A_s \times P(V)$, удовлетворяющих условию $\varphi(\xi) = 0$. Фильтрация (1) высекает на $\mathcal{L}$ ранговую фильтрацию $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2 \supset \dots \supset \mathcal{L}_e$.

Предложение 1. $\mathcal{Z}_1$ — гладкое неприводимое многообразие. При $m \geq n$ это доказано в (3).

Пусть $m \leq n$. Рассмотрим естественную проекцию $\pi: A_s \rightarrow A_{s'}$, $s' = (s_1, \dots, s_{m-1})$ и индуцированное ею отображение $\tilde{\pi}: \mathcal{Z}_1 \rightarrow A_{s'} \times P(V)$.

Образ $\tilde{\pi}(\mathcal{Z}_1) = \mathcal{Z}(A_{s'} \times P(V))$ определяется условием $\pi(f)(x) = 0$ и, следовательно, согласно (3) является гладким неприводимым многообразием. Слой точки $(\pi(\varphi), \xi) \in \tilde{\pi}(\mathcal{Z}_1)$ изоморфен подпространству точек $f_m \in \text{Sym}_{s_m}(V^*)$, удовлетворяющих соотношениям $f_m(\xi) = 0$, $\text{rk}_\xi(\pi(\varphi), \xi) \leq m-1$, которые определяют линейное подпространство в $\text{Sym}_{s_m}(V^*)$ коразмерности $1+n-m \leq \dim \text{Sym}_{s_m}(V^*)$. Таким образом, $\tilde{\pi}$ — векторное расслоение с гладкой неприводимой базой. Предложение доказано.

При $m \geq n$ $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_0$. При $m=1$ $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{S}_1$. Если $1 \leq m \leq n$, то $\dim \mathcal{Z}_1 = \dim A_s - 1$. Проекция $\mathcal{Y} \subset A_s$ многообразия $\mathcal{Z}_1 \subset A_s \times P(V)$ на первый сомножитель называется дискриминантным многообразием. Дискриминантное многообразие параметризует те $\varphi \in A_s$, для которых X_φ особо или имеет подскок размерности. Коразмерность дискриминантного многообразия равна $m-n+1$ при $m \geq n$, $n-m+1$ при $m \leq n$, $s=1$ и 1 в остальных случаях (3).

Множества $\mathcal{Y}_i$ точек $\varphi \in A_s$, имеющих $\geq i$ прообраза в $\mathcal{Z}_1$, образуют „тонкую“ фильтрацию дискриминантного многообразия $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \supset \supset \mathcal{Y}_2 \supset \mathcal{Y}_3 \supset \dots$. Множества $\mathcal{Y}'_i$ точек $\varphi \in A_s$, полный прообраз которых в $\mathcal{Z}_1$ имеет размерность $\geq i$, определяют „грубую“ фильтрацию на дискриминантном многообразии $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}'_0 \supset \mathcal{Y}'_1 \supset \dots \supset \mathcal{Y}'_s$. Заметим, что при $m=1$, $s=2$ $\mathcal{Y}_2$ совпадает с $\mathcal{Y}'_1$.

Из предложения 1 сразу следует

Предложение 2. $\text{Sing } \mathcal{Y} = \mathcal{Y}'_2$.

Теорема 1. Пусть $\varphi \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{Y}'_2$, $(\varphi, \xi) \in \mathcal{Z}_1$ — единственный прообраз φ , L — нулевое подпространство оператора $\mathcal{Y}'(\varphi, \xi)$ в k^m , $T_\varphi \mathcal{Y}$ — касательное пространство к многообразию $\mathcal{Y}$ в точке φ . Тогда

$$T_\varphi \mathcal{Y} = \{f \in A_s \mid \sum_k f_k(\xi) y_k = 0 \text{ на } L\}.$$

При этом размерность L равна 1, если $m \leq n$, и $m-n+1$, если $m \geq n$.

Доказательство. Пусть сначала $m \geq n$. Многообразие $\mathcal{Z}_1 \subset A_s \times P(V)$ в фиксированном базисе $(e_1, \dots, e_n)$ пространства V определяется как множество общих нулей форм

$$F_k(f, x) = f_k(x) = \sum_{i_1, \dots, i_{s_k}} f_{i_1 \dots i_{s_k}}^k x^{i_1} \dots x^{i_{s_k}} \quad (k=1, \dots, m). \quad (2)$$

Касательное пространство к $\mathcal{Z}_1$ в точке (φ, ξ) задается пересечением гиперплоскостей

$$\sum_{i_1, \dots, i_{s_k}} f_{i_1 \dots i_{s_k}}^k \frac{\partial F_k}{\partial f_{i_1 \dots i_{s_k}}^k}(\varphi, \xi) + \sum_l x_l \frac{\partial F_k}{\partial x_l}(\varphi, \xi) = 0 \quad (k=1, \dots, m), \quad (3)$$

т. е. системой

$$\sum_{i_1, \dots, i_{s_k}} f_{i_1 \dots i_{s_k}}^k \xi_{i_1} \dots \xi_{i_{s_k}} + \sum_l x_l \frac{\partial f_k}{\partial x_l}(\xi) = 0 \quad (k=1, \dots, m).$$

Ввиду линейности отображения проектирования касательное пространство $T_{\varphi, \xi} \mathcal{Y}$ является образом касательного пространства $T_{(\varphi, \xi)} \mathcal{Z}_1$. Точка f будет принадлежать проекции $T_{(\varphi, \xi)} \mathcal{Z}_1$ на A , тогда и только тогда, когда система линейных уравнений

$$\sum x_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\xi) = -f_k(\xi) \quad (k=1, \dots, m)$$

имеет решение, что согласно теореме Кронекера—Капелли эквивалентно условию

$$\text{rk } \mathcal{Y}(\varphi, \xi) = \text{rk}(\mathcal{Y}(\varphi, \xi), 'f(\xi)), \quad (4)$$

причем $\text{rk } \mathcal{Y}(\varphi, \xi) = n-1$ ввиду неособости точки φ на $\mathcal{Y}$. В этом случае очевидно, что $\dim L = m - \text{rk } \mathcal{Y}(\varphi, \xi) = m - n + 1$ и условие (4) выполняется тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^m f_k(\xi) y_k = 0 \quad \forall (y_1, \dots, y_m) \in L$.

Если $m \leq n$, многообразие $\mathcal{Z}_1$ определяется как множество нулей системы (2), дополненной формами

$$D_j(f, x) = \text{Det} \left\| \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right\|_{i=1, \dots, m-1, j}^{k=1, \dots, m} \quad (j=m, m+1, \dots, n).$$

Соответственно, $T_{(\varphi, \xi)} \mathcal{Z}_1$ задается пересечением гиперплоскостей (3) и

$$\sum_k \sum_{i_1, \dots, i_{s_k}} f_{i_1 \dots i_{s_k}}^k \frac{\partial D_j}{\partial f_{i_1 \dots i_{s_k}}}(\varphi, \xi) + \sum_i x_i \frac{\partial D_j}{\partial x_i}(\varphi, \xi) = 0 \quad (j=m, m+1, \dots, n).$$

Пусть

$$D(f, x) = \left\| \frac{\partial D_j}{\partial x_i} \right\|_{i=1, \dots, n}^{j=m, m+1, \dots, n}$$

Условие Кронекера—Капелли в этом случае имеет вид

$$\text{rk}(\mathcal{Y}(\varphi, \xi), 'D(\varphi, \xi)) = \text{rk} \left\| \begin{array}{c} \mathcal{Y}(\varphi, \xi) \\ f(\xi) \\ 'D(\varphi, \xi) \end{array} \right\|,$$

причем ввиду предложения 1 $\text{rk}(\mathcal{Y}(\varphi, \xi), 'D(\varphi, \xi)) = n-1$. Существует единственная $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in P(k^n)$ такая, что $(\mathcal{Y}(\varphi, \xi), 'D(\varphi, \xi)) \cdot \eta = 0$. Так как $\text{rk } \mathcal{Y}(\varphi, \xi) = m-1$, то $\eta_{m+1} = \dots = \eta_n = 0$ и условие Кронекера—Капелли равносильно соотношению $\eta_1 f(\xi) + \dots + \eta_m f_m(\xi) = 0$, причем $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ —единственная точка $P(L)$. Теорема доказана.

Утверждение доказанной теоремы хорошо известно при $m=1$, $s=2$ (1,2).

Примененными методами можно доказать, что справедлива

Теорема 2. Если $\mathcal{Y}_2 \neq \mathcal{Y}_1'$, то $\text{Sing } \mathcal{Y}_2 = \mathcal{Y}_2$. Если $\mathcal{Y}_2 = \mathcal{Y}_1'$, то $\text{Sing } \mathcal{Y}_2 = \mathcal{Y}_2'$. Пусть φ —неособая точка $\mathcal{Y}_2$, Ξ —множество точек $\xi \in P(V)$ таких, что $(\varphi, \xi) \in \mathcal{Z}_1$. Для каждого $\xi \in \Xi$ пусть L_ξ —нулевое подпространство оператора $\mathcal{Y}(\varphi, \xi)$. Тогда

$$T_\varphi \mathcal{Y}_2 = \left\{ f \in A_s \mid \sum_{k=1}^m f_k(\xi) y_k \equiv 0 \text{ на } L_\xi \quad \forall \xi \in \Xi \right\}.$$

Դիսկրիմինանտային բազմաձևության շոշափող շերտավորման մասին

Եթե V -ն դժալին տարածություն է, որոշված 0 բնութագրիչ ունեցող դաշտի վրա, V^* համալուծ տարածությունն է, $\text{Sym}_{s_i}(V^*)$ -ը V -ի վրա որոշված S_i աստիճանի համասեռ ձևերի տարածությունն է, $A = \text{Sym}_{s_1}(V^*) \times \dots \times \text{Sym}_{s_m}(V^*)$, ապա դիսկրիմինանտային բազմաձևությունը այն $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in A$ կետերի բազմությունն է, որոնց համար $\varphi_i = 0 (i=1, \dots, m)$ հավասարումներով որոշվող բազմաձևությունը եզակի է կամ ունի չափողակալություն թռիչք:

Ապացուցվում է, որ դիսկրիմինանտային բազմաձևության φ պարզ կետում տարված շոշափող տարածությունը $\{f \in A \mid \sum f_k(\xi) y_k = 0 \forall y = (y_k) \in L\}$ բազմությունն է, որտեղ L ենթատարածությունը φ -ի համար որոշվում է միարժեքորեն:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. Н. Тюрин, УМН, т. 30, вып. 6 (1975). ² J. G. Room, Geometry of determinantal loci, Cambridge, 1938. ³ С. Г. Далалян, ДАН АрмССР, т. 81, №1 (1985).