ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXIII 1986 2

УДК 519.4

МАТЕМАТИКА

А Ш. Малхасян

О разрешимости уравнений в циклических подгруппах свободной группы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 29/III 1985)

Пусть F—свободная группа с алфавитом образующих

$$a_1, \ldots, a_w, a_1^{-1}, \ldots, a_w^{-1}. \tag{1}$$

Уравнением в свободной группе F с неизвестными $x_1, \ldots, x_\lambda$ называется равенство вида

$$A_1 x_{i_1}^{\varepsilon_1} A_2 x_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots A_m x_{i_m}^{\varepsilon_m} = 1, \tag{2}$$

где A_j—слова в алфавите (1). Список слов

$$X_1, \ldots, X_\lambda \tag{3}$$

в алфавите (1) называется решением уравнения (2), если слово $A_1 X_{i_1}^{\varepsilon_1} A_2 X_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots A_m X_{i_m}^{\varepsilon_m}$ равно 1 в свободной группе F. Еще в 1918г. Нильсен ([1]) решил уравнение $xyx^{-1}y^{-1}=aba^{-1}b^{-1}$ в свободной группе. Затем уравнения в свободной группе изучались в различных работах (см. например ([2])). Лишь в 1982 г. Г. С. Маканин ([3]) впервые дал алгоритм, который по всякому уравнению в свободной группе распознает его разрешимость.

Пусть (2) — уравнение в свободной группе, а $\Gamma_1, \ldots \Gamma_s$—конечно-порожденные подгруппы F. Решение (3) уравнения (2) будем называть решением в подгруппах $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$, если $X_i \in \Gamma_i$ для всех $i=1, \ldots, s$. В настоящей работе исследуется разрешимость уравнений в свободной группе в заданных ее конечно-порожденных подгруппах. Справедлива следующая

Теорема. *Существует алгоритм, который по всякому уравнению в свободной группе F и любым ее циклическим подгруппам выясняет, существует или нет решение этого уравнения в заданных подгруппах.*

При $s=\lambda$ результат настоящей работы эквивалентен результату Линдона ([2]), а при $s=0$—результату работы ([3]).

Пусть $t_1, \ldots, t_a$—множество параметров, принимающих значениями целые положительные числа. Индуктивно определим понятие параметрического коэффициента: всякое слово A в алфавите (1) есть параметрический коэффициент ступени 0; если A—параметрический коэффициент ступени τ, то A^t, где $t \in \{t_1, \ldots, t_a\}$, есть параметрический коэффициент ступени $\tau+1$, если A и B параметрические коэффициенты ступеней τ_1 и τ_2, соответственно, то AB есть параметрический коэффициент ступени $\tau = \max(\tau_1, \tau_2)$. Равенство вида

$$B_1 x_{i_1}^{\varepsilon_1} B_2 x_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots B_r x_{i_r}^{\varepsilon_r} = 1, \tag{4}$$

где B_j—параметрические коэффициенты ступеней τ_j, $x_{i_j} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, называется параметрическим уравнением ступени τ, где $\tau = \max(\tau_1, \ldots, \tau_r)$. Здесь $\varepsilon_j = \pm 1$. Длиной записи уравнения (4) будем называть число $\beta = \sum_{i=1}^{r} (\partial(\bar{B}_i) + 1)$, где $\bar{B}_i$—слово в алфавите (1), полученное при подстановках чисел 1 вместо всех параметров $t_1, \ldots, t_a$ в параметрических коэффициентах $B_1, \ldots, B_r$.

Решением уравнения (4) будем называть вектор

$$(X_1, \ldots, X_n, \ t_1^0, \ldots, t_a^0) \tag{5}$$

(здесь X_j—слова в алфавите (1), а t_i^0—натуральные числа) такой, что при подстановках слов X_j вместо неизвестных x_j и чисел t_i^0 вместо параметров t_i в левой части уравнения (4) получится слово в алфавите (1), равное 1 в свободной группе F.

Лемма 1. *Для всякого уравнения вида* (2) *в свободной группе* F, *с длиной записи* β *и для всяких циклических подгрупп* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ *с максимумом длин порождающих слов, равным* d, *можно построить параметрическое уравнение вида* (4) *ступени* 1 *с длиной записи* $\bar{\beta}$, *не превосходящей* $\beta \cdot d$, *такое, что уравнение* (2) *разрешимо в подгруппах* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ *тогда и только тогда, когда разрешимо уравнение* (4).

Длиной решения параметрического уравнения (4) называется максимум длин слов $X_1, \ldots, X_n$, а максимальным параметром решения (5) параметрического уравнения (4) называется наибольшее из чисел $t_1^0, \ldots, t_a^0$. Решение (5) параметрического уравнения (4) называется минимальным, если оно минимально среди всех решений уравнения (4).

Лемма 2. *Существует рекурсивная функция* $f(x)$ *от целочисленного аргумента такая, что для всякого параметрического уравнения ступени* 1 *с длиной записи* δ *в свободной группе* F *найдется минимальное решение этого уравнения, максимальный параметр которого не превосходит числа* $f(\delta)$.

Из леммы 2 следует, что алгоритмически распознаваема разрешимость любого параметрического уравнения ступени 1 в свободной группе F. Действительно, вместо параметров можно подставить всевозможные натуральные числа, не превосходящие числа $f(\delta)$. При этом получится конечное множество обыкновенных уравнений в свободной группе F, к каждому из которых можно применить алгоритм из работы [3]. Далее с помощью леммы 1 доказывается теорема.

Приношу глубокую благодарность Г. С. Маканину за постановку задачи.

Ереванский государственный
университет

Ա. Հ. ՄԱԼԽԱՍՅԱՆ

Ազատ խմբի ցիկլիկ ենթախմբերում հավասարումների լուծելիության մասին

Դիցուք F-ը վերջավոր ռանգ ունեցող ազատ խումբ է, և դիցուք $J(x_1, \ldots, x_\lambda)=1$ F խմբում λ թվով անհայտներ ունեցող հավասարում է։ Դիցուք $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$-ը F խմբի ցիկլիկ ենթախմբեր են $(0\leqslant s\leqslant\lambda)$: Աշխատանքում ապացուցված է, որ հավասարման լուծման գոյության պրոբլեմը ալգորիթմորեն լուծելի է $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ ենթախմբերում, ինչ էապես լավացնում է Լինդոնի արդյունքը $(s=\lambda)$ և համընկնում է Մականինի արդյունքի հետ $s=0$ համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *J. Nielsen*, Math. Amer., B. 78, S. 385—397 (1918). [2] *R. C. Lyndon*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 96, p. 518—533 (1960). [3] *Г. С. Маканин*, Изв. АН СССР. Сер мат., т. 46, № 6 (1982).