ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 1

УДК 535.317

ФИЗИКА

А. Г. Багдоев, Г. С. Безиргенян

Уравнения взаимодействующих ограниченных мощных световых пучков в однородных нелинейных диссипативных средах и их решения

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 5/I 1986)

В работе, в общем случае, для плоско поляризованных взаимодействующих мощных световых пучков, распространяющихся навстречу друг другу в однородных средах с насыщением и с кубической нелинейностью, получены параболические уравнения для комплексных амплитуд. Рассмотрены частные случаи: линейной и круговой поляризации одинаковых пучков. Находятся решения полученных уравнений в виде гауссовых пучков при наличии диссипации.

Имеется много работ, посвященных как исследованию свойств сред с насыщением [1,2], так и решению задач самофокусировки стационарных пучков [3–6].

В [3–6] рассмотрены взаимодействия встречных пучков в однородных недиссипативных средах с кубической нелинейностью. Исследования проведены как теоретически, так и экспериментально. В частности, определены фокусные расстояния. Указаны новые оптические устройства [3,5,6], в которых используется эффект взаимодействия (бистабильность).

В [6] для встречных бегущих волн, распространяющихся в неоднородной активной среде с кубической нелинейностью и линейной поляризацией, получены параболические уравнения для амплитуд и эйконалов. В случае однородной среды и осесимметричных пучков получены решения этих уравнений, которые позволяют исследовать ход распространения пучков. При самофокусировке определены фокусные расстояния.

1. Выведем уравнения для амплитуд и эйконалов взаимодействующих встречных пучков, распространяющихся в изотропной, однородной диссипативной среде с нелинейным законом зависимости ε от $\mathscr{E}$, ($\mathscr{E}$ — комплексная амплитуда монохроматической волны, а ε — диэлектрическая проницаемость среды).

Исходные уравнения электродинамики совместно с материальными уравнениями для ненамагничиваемых ($\mu=1$), изотропных сред сводятся к волновому уравнению

$$\Delta\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}=0, \tag{1}$$

где $\vec{D}=\mathrm{Re}\{\vec{D}_1 e^{-i\omega t}\}$, $\vec{D}_1=\varepsilon_0\vec{E}+\bar{\varepsilon}|\vec{\mathscr{E}}|^2\vec{\mathscr{E}}+\bar{\beta}\vec{\mathscr{E}}^2\vec{\mathscr{E}}^*$, $\bar{\varepsilon}=\varepsilon_2+i\varepsilon_1$.

ε_0, ε_1, ε_2, $\bar{\beta}$—диэлектрические постоянные однородной среды. (Здесь и далее индексом $*$ обозначаются комплексно сопряженные величины).

Решение уравнения (1) ищется в форме $\vec{E}=\mathrm{Re}\{\vec{\mathscr{E}}e^{-i\omega t}\}$, где ω—основная циклическая частота, а $\vec{\mathscr{E}}$ для двух плоско поляризованных волн записывается в форме

$$\vec{\mathscr{E}}=(A_1e^{ip}+B_1e^{iq})\vec{e}_1+(A_2e^{ip}+B_2e^{iq})\vec{e}_2, \tag{2}$$

где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$—единичные векторы, находящиеся в плоскости, перпендикулярной к оси пучка $(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=0)$, A_1, B_1, A_2, B_2—комплексные амплитуды волн, p, q—эйконалы основных волн.

Полагая $A_1=ae^{i\varphi_1}$, $B_1=b_1e^{i\psi_1}$, $A_2=a_2e^{i\varphi_2}$, $B_2=b_2e^{i\psi_2}$, $(a_1, b_1, a_2, b_2$—действительные амплитуды, φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2—дополнительные эйконалы возбужденных волн), подставляя решение (2) в уравнение (1) и проведя осреднение по быстрым осцилляциям $p-q$ в отрезке $[0, 2\pi]$, с использованием дисперсионных соотношений ([7]), при предположении, что A_1, B_1, A_2, B_2 медленно меняющиеся амплитуды на длине волны, получим параболические уравнения для комплексных амплитуд ([9])

$$\Delta A_1+2i\sum\frac{\partial A_1}{\partial x_k}\alpha_k+\frac{\bar{\varepsilon}\omega^2}{c^2}[A_1(C+b_1^2)+A_2b_1b_2e^{-i(\psi_1-\psi_2)}]+$$
$$+\frac{\omega^2}{c^2}\bar{\beta}(2B_2B_1^*A_2+2B_1B_1^*A_1+A_2^2A_1^*+A_1^2A_1^*)=0, \tag{3}$$

где $\qquad C=a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2$.

(Уравнение для B_1 получается из (3) заменой $A_{1,2}$ на $B_{1,2}$, φ на ψ, α_k на β_k, а уравнения для A_2 и B_2 записываются в иденличной форме, только в нелинейных частях следует поменять индекс 1 на 2, а 2 на 1).

Рассмотрим частный случай двух одинаковых волн, распространяющихся вдоль оси x. В этом случае $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $\varphi_1=\varphi_2$, $\psi_1=\psi_2$, $\alpha_1=-\beta_1=k$, $\alpha_{2,3}$, $\beta_{2,3}=0$. В частности, при линейной поляризации $a_2=0$ и уравнения (3) примут вид

$$\Delta_\perp A_1+2ik\frac{\partial A_1}{\partial x}+3\frac{\varepsilon'\omega^2}{c^2}a_1^2A_1=0, \tag{4}$$

где $\varepsilon'=\bar{\varepsilon}+\bar{\beta}$, а $\Delta_\perp$—укороченный оператор Лапласа.

В случае круговой поляризации $A_2/A_1=i$ и в (4) следует полагать $\varepsilon'=\bar{\varepsilon}$. Отметим, что в случае одного пучка в (4) тройку перед нелинейным членом следует заменить на единицу.

Заменяя в (4) A_1 на $a_1e^{i\varphi}$ и проведя соответствующие вычисления, получим уравнения для амплитуд и фаз. Решения упомянутых уравнений для осесимметричных гауссовых пучков записываются в форме:

$$a=\frac{a_0}{f(x')}\exp\left(-\frac{r^2}{2y_0^2f^2(x')}\right),\qquad \varphi=k\left[\sigma_F(x')+\frac{r^2}{2R(x')}\right]. \tag{5}$$

Смысл принятых буквенных обозначений, кроме $x'=L-|x|$, указан в ([7]).

Подставляя решения (5) соответственно в уравнения амплитуды и эйконала, разлагая exp (...) в степенный ряд и приравнивая слагаемые порядка $O(1)$ и $O(r^2)$, получим уравнения для безразмерной ширины, радиуса кривизны и набег фазы

$$\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{n}{f^3},\quad \frac{1}{R(x')}=\frac{d}{dx'}\ln f(x')-\frac{N}{2}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\frac{a_0^2}{f^2(x')},\quad \frac{d\sigma_F}{dx'}=-\frac{1}{2f^2}\times$$

$$\times\left(\frac{y_0^2}{4l_д^2}-Na_0^2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\right),\quad \text{где}\quad n=\frac{1}{4l_д^2}\left(1-4N\frac{l_д^2}{F_{нл}}\right),\tag{6}$$

$$\frac{1}{F_{пл}}=a_0^2\left(\frac{N}{4}k^2\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_0^2}a_0^2+\frac{\varepsilon_2}{y_0^2\varepsilon_0}\right),\quad \frac{1}{l_д^2}=\frac{2}{ky_0^2}.$$

(Уравнения, полученные в разных приближениях как для f, так и для σ, совпадают. В решении (6) для одного пучка $N=1$, а для двух пучков $N=3$.)

Решение уравнения (6) для f при граничных условиях

$$f(0)=1,\quad f'(0)=-\Gamma,\quad -\Gamma=\frac{1}{R(0)}+\frac{N}{2}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}a_0^2<0$$

записывается в форме

$$x'=\frac{\sqrt{f^2(\Gamma^2+n)-n}}{\Gamma^2+n}-\frac{\Gamma}{\Gamma^2+n}.\tag{7}$$

Требуя, чтобы расстояние $2L$ между начальными положениями пучков было таким, что $f'(L)=0$, можно получить $f^2(L)=n/(\Gamma^2+n)$. Тогда из (7) следует, что

$$L=\frac{\Gamma}{\Gamma^2+n},\quad \frac{f^2}{f_0^2}=1+x^2\frac{(\Gamma^2+n)^2}{n},\quad \text{где}\quad f_0^2=\frac{n}{\Gamma^2+n}.\tag{8}$$

(Рассматривается пучок, идущий слева направо.)

Такой выбор начального расположения пучков обеспечивает непрерывный переход их профилей в точке $x'=L$, $(x=0)$, т. е. в плоскости симметрии фронтов встречных пучков при $L=\Gamma/(\Gamma^2+n)$ имеет место гладкий переход пучков. Но ход распространения лучей в этой точке имеет излом $(\partial\varphi\partial/r=r/R(x'),\ 1/R(+0)=-1/R(-0)=N/2\times \times\varepsilon_1/\varepsilon_0\cdot ka_0^2/f_0^2)$.

Подставляя выражение f^2 из (8) в уравнение (6) для σ_F и проведя интегрирование при $n>0$, получим:

$$\sigma_F-\sigma_0=-\frac{m}{2\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{\Gamma}{L\sqrt{n}}x,\tag{9}$$

где $m=\frac{y_0^2}{4l_д^2}\left(1-4Nl_д^2a_0^2\frac{\varepsilon_2}{y_0^2\varepsilon_0}\right)$.

Отметим, что для встречного пучка, распространяющегося справа налево, правая часть (9) меняет знак.

Из (9) следует, что

$$\frac{1}{2}(\sigma_F-\sigma_B)=\Delta-\frac{m}{2\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{\Gamma}{L\sqrt{n}}x,\tag{10}$$

где постоянная Δ находится из равенства фаз (с точностью слагаемого $-2kL$) при $x=L$ (выходное сечение)

$$\Delta=-kL+\frac{m}{2\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{\Gamma}{\sqrt{n}}. \tag{11}$$

Из равенств (10), (11) при $x=-L$ (входное сечение) следует, что

$$\frac{1}{2}(\sigma_F-\sigma_B)=\frac{m}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{\Gamma}{\sqrt{n}}-kL. \tag{12}$$

Зная разность фаз на входе, можно определить пропускную способность интерферометра [3], решая уравнение

$$\frac{(1-\overline{R})a_0^2}{c_0^2}=[1+F\sin^2(kL+G)]^{-1}, \tag{13}$$

где $G=-\frac{m}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\Gamma/\sqrt{n}$, C_0—начальная интенсивность пучка перед входом в интерферометр, $F=4\overline{R}/(1-\overline{R})^2$, а $\overline{R}$—коэффициент отражения зеркала. В частном случае конфокальных зеркал $(R(\pm L)=\pm 2L)$, $\Gamma/\sqrt{n}=1$ или $f_0^4=nL(|R|-L)$, что является резонансным уравнением для нелинейного интерферометра, и решение уравнения (13) приведено в [3].

Другой вариант решения уравнений (6) состоит в требовании гладкости лучей при $x'=L$ $(x=0)$, $(1/R(+0)=1/R(-0)$, $L=\Gamma/(\Gamma^2+n)+3/2\varepsilon_1/\varepsilon_0\cdot a_0^2)$, но при этом функция $f'(x')=df/dx'$ в этой точке будет терпеть разрыв.

Таким образом, в однородных диссипативных средах в плоскости симметрии фронтов встречных пучков имеет место или излом лучей, или излом профилей пучков. В недиссипативных средах имеет место гладкий переход как лучей, так и профилей пучков при соответствующем выборе расстояния между начальными сечениями пучков [3,7].

Следует отметить, что так как точное решение уравнений (6) вблизи оси симметрии встречных пучков можно представить в форме степенных рядов по r, то обнаруженный эффект для однородных диссипативных сред, по всей видимости, верен в окрестности оси симметрии. Желательно по этой задаче провести соответствующие экспериментальные исследования.

Решения (7), (9) отличаются от соответствующих решений, полученных в ([3,5]) тем, что они содержат нелинейное поглощение ($\varepsilon_1>0$) или усиление $(\varepsilon_1<0)$, которое особенно важно учитывать в активных средах с эффектом бистабильности (взаимодействие пучков).

3. Рассмотрим задачу наложения волн в однородной среде с насыщением. В этом случае [1]

$$\varepsilon=1\pm\frac{4\pi|d_{12}^{\pm}|^2}{\varepsilon h\sqrt{1+\alpha}}=1+\frac{\varepsilon_0-1}{\sqrt{1+\lambda|\mathscr{E}|^2}}, \tag{14}$$

где смысл величин $d_{12}^{\pm}$, h, α указан в [1], ε_0, λ—известные постоянные, $(\varepsilon_0-1<0,\ \lambda>0)$, $\mathscr{E}$—амплитуда волны.

Для среды с насыщением уравнение (1) примет вид

$$\Delta\mathscr{E}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(1+\frac{\varepsilon_0-1}{\sqrt{1+\lambda|\mathscr{E}|^2}}\right)\mathscr{E}=0. \qquad (15)$$

В случае встречных пучков с линейной поляризацией $\mathscr{E}=A_1e^{ip}+B_1e^{iq}$. Подставляя решение $\mathscr{E}$ в уравнение (15), помножая поочередно на e^{-ip}, e^{-iq} и осредняя по $p-q$ или, что то же самое, по $p-q+\varphi-$ $-\psi$, можно получить уравнение

$$-\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_0-1)A_1+2i\alpha_k\frac{\partial A_1}{\partial x_k}+\Delta_\perp A_1+\frac{\omega^2}{c^2}A_1(\varepsilon_0-1)\frac{2}{\pi}F\left(\frac{\pi}{2},\bar{\lambda}\right)\eta+$$

$$+\frac{\omega^2}{c^2}\frac{(\varepsilon_0-1)}{\pi\lambda\eta a_1}e^{i\varphi}\left\{E\left(\frac{\pi}{2},\bar{\lambda}\right)-[1+\lambda(a_1^2+b_1^2)]\eta^2F\left(\frac{\pi}{2},\bar{\lambda}\right)\right\}=0 \qquad (16)$$

(и такому же уравнению удовлетворяет B_1 с той разницей, что вместо φ стоит ψ, а вместо $\alpha_k-\beta_k$).

Здесь $\bar{\lambda}^2=4\lambda a_1b_1\eta^2$, $\eta^2=[1+\lambda(a_1+b_1)^2]^{-1}$, $F\left(\frac{\pi}{2},\bar{\lambda}\right)$ $E\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода.

При малых b_1 последние два слагаемых в (16) и в не приведенном уравнении для второго пучка, распространяющегося справа налево, дают

$$-\frac{\omega^2}{2c^2}\eta(\varepsilon_0-1)\lambda b_1^2A_1, \quad -\frac{\omega^2}{2c^2}\eta(\varepsilon_0-1)\lambda a_1^2B_1$$

И уравнения для комплексных амплитуд A_1 и B_1 сводятся к параболическому уравнению (4), в котором $3a_1^2$ в нелинейном члене заменен соответственно на $a_1^2+2b_1^2$ и $b_1^2+2a_1^2$. Подобные уравнения для неоднородной кубическо-нелинейной среды были получены в ([7]).

В случае одного пучка, полагая в упомянутом уравнении $b_1=0$, получим

$$2i\alpha_k\frac{\partial A_1}{\partial x_k}+\Delta_\perp A_1+\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_0-1)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda a_1^2}}-1\right)A_1=0 \qquad (17)$$

Уравнение (16) при $a_1=b_1$ и $\lambda a_1^2\gg1$ имеет вид

$$-\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_0-1)A_1+2i\alpha_k\frac{\partial A_1}{\partial x_k}+\Delta_\perp A_1+\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_0-1)\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda a_1^2}}=0$$

Решение уравнения (17) полезно при изучении процессов взаимодействия волн в интерферометрах Фабри-Перо и других оптических приборах, в которых происходит включение двух устойчивых состояний с помощью мощных пучков ([5]).

Авторы благодарят академика АН Армянской ССР Л. М. Тер-Микаеляна за обсуждения работы.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ոչ գծային դիսիպատիվ համասեռ միջավայրում տարածվող փոխազդող սահմանափակ հզոր լուսային փնջերի հավասարումները և նրանց լուծումները

Ընդհանուր դեպքում, հագեցված և խորանարդ աստիճանով ոչ գծային համասեռ դիսիպատիվ օպտիկական միջավայրերում հանդիպակաց ուղղություններով տարածվող հարթ բևեռացված հզոր լուսային ալիքների կոմպլեքս ամպլիտուդաների համար ստացված է կապակցված պարաբոլակ հավասարումների սիստեմ։ Դիտարկված են գծային և շրջանային բևեռացված միատեսակ հանդիպակաց փնջերի մասնավոր դեպքերը։ Նշված մասնավոր դեպքերում լիկական ամպլիտուդայի և ֆազայի համար ստացված են համապատասխան հավասարումներ։

Ֆազայի համար ստացված լուծումը հնարավորություն է տալիս հաշվելու ինտերֆերոմետրի բաց թողման հնարավորությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Л. Тер-Микаелян*, Нелинейная резонансная оптика. Ч. 1. 2, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1974. [2] *С. Г. Зегерт*, Теоретические основы лазерной спектроскопии насыщения, Изд-во ЛГУ, 1979. [3] *J. K. Marburger*, *F. S. Felber*, The Physical Review A., v. 17, № 1 (1978). [4] *С. А. Ахманов*, *Р. П. Сухоруков*, *Р. В. Хохлов*, УФН, т. 93, вып. 1 (1967). [5] *A. E. Kaplan*. Optical Letters, v. 6. p. 360—362 (1981). [6] *А. Г. Багдоев*, *Г. С. Безиргенян*, ДАН АрмССР, т. 79, № 1 (1984). [7] *С. Г. Раутиан*, ЖЭТФ, т. 41, с. 440 (1984). [8] *Л. Д. Ландау*, *Е. М. Лифшиц*, Электродинамика сплошных сред, т. 8, М., Наука, 1982 [9] *А. Г. Багдоев*, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 33, № 1 (1980).