

УДК 530.145

ФИЗИКА

Л. Ш. Григорян, А. А. Саарян

Эффект Казимира для идеально проводящей
сферической поверхности

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 27/V 1985)

В 60-е гг. в лабораторных условиях было обнаружено явление притяжения между двумя идеально проводящими плоскопараллельными пластинами, соответствующее отрицательному давлению (¹)

$$p = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{d^4},$$

где d — расстояние между проводниками. Оно возникает в результате возмущения нулевых колебаний электромагнитного вакуума пластинами (²). В аналогичной ситуации для сверхпроводящей сферической поверхности изменение полной энергии вакуума было рассчитано в период с 1968 по 1978 гг. (³⁻⁵):

$$E = 0,04618 \frac{\pi \hbar c}{a}, \quad (1)$$

где a — радиус сферы. В работах (⁶⁻⁸) приближенным численным методом вычислены компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного вакуума

$$\tau_{ik}^0 = \text{diag}(\epsilon, -p, -p_{\perp}, -p_{\perp}),$$

где ϵ — плотность вакуумной энергии, а p и $p_{\perp}$ — соответствующие давления в радиальном и азимутальном направлениях. Ниже точным численным методом рассчитаны ϵ , p , $p_{\perp}$ и установлен ряд свойств τ_{ik}^0 .

В случае сферически-симметрической задачи операторы электромагнитного поля удобно разлагать в ряд по состояниям фотона с определенными значениями энергии $\hbar\omega$, полного момента $\hbar\sqrt{l(l+1)}$, где $l=1, 2, 3 \dots$, его проекции $\hbar m (-l \leq m \leq l)$ и четности $(-1)^{l+1+\lambda}$. Рассмотрим вектор-потенциал в кулоновской калибровке

$$\vec{A} = \sum_{\omega l m \lambda} (c_{\omega l m \lambda} \vec{A}_{\omega l m \lambda} + c_{\omega l m \lambda}^+ \vec{A}_{\omega l m \lambda}^*), \quad (2)$$

где $c_{\omega l m \lambda}$, $c_{\omega l m \lambda}^+$ — операторы уничтожения и рождения фотона, $\lambda=0$ для фотонов магнитного типа и $\lambda=1$ для фотонов электрического типа (⁹). Элементарные гармоники $\vec{A}_{\omega l m \lambda}$ находятся путем решения уравнений Максвелла в пустоте при граничных условиях

$$\vec{E} \times \vec{n} = \vec{H} \cdot \vec{n} = 0 \quad (3)$$

на сверхпроводящей поверхности $r=a$. В (3) $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, $\vec{n}=\vec{r}/r$ — единичный вектор, а r — радиальная координата сферической системы координат, начало которой мы поместим в центре сферы. Функции $A_{\omega l m \lambda}$ приведены в (9,10). С помощью выражений

$$\varepsilon = \langle 0 | (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) | 0 \rangle / 8\pi, \quad p_{\perp} = (\varepsilon - p) / 2, \quad (4)$$

$$p = \varepsilon - \langle 0 | [(\vec{n} \cdot \vec{E})^2 + (\vec{n} \cdot \vec{H})^2] | 0 \rangle / 4\pi,$$

где $|0\rangle$ — амплитуда состояния электромагнитного вакуума, и разложений $\vec{E}$, $\vec{H}$, вытекающих из (2), после суммирования по m находим, что внутри сферы

$$\varepsilon = \frac{\hbar c}{8\pi a^3} \sum_{\omega l \lambda} \omega \frac{l j_{l+1}(\omega r) + (l+1) j_{l-1}(\omega r) + (2l+1) j_l(\omega r)}{j_l(\omega a) - j_{l-1}(\omega a) j_{l+1}(\omega a)} \quad (5)$$

$$p_{\perp} = \frac{\hbar c}{8\pi a^3 r^2} \sum_{\omega l \lambda} \frac{l(l+1)(2l+1) j_l^2(\omega r)}{\omega [j_l(\omega a) - j_{l-1}(\omega a) j_{l+1}(\omega a)]}$$

Здесь j_l — сферическая функция Бесселя, а ω пробегает дискретный набор значений, определяемый условиями (3):

$$j_l(\omega a) = 0 \quad \text{при } \lambda = 0, \quad (6)$$

$$d[aj_l(\omega a)]/da = 0 \quad \text{при } \lambda = 1.$$

В соответствии со стандартной процедурой перенормировки расходящихся сумм нужно в (5) ввести обрезавшую функцию $\psi(\mu\omega)$ (μ — параметр обрезания), $\psi(0)=1$, после чего все суммы становятся конечными. Теперь задача сводится к вычислению предела

$$\text{reg} \langle 0 | \tau_{ik} | 0 \rangle = \lim_{\mu \rightarrow +0} [\langle 0 | \tau_{ik}(\mu, a) | 0 \rangle - \lim_{a \rightarrow \infty} \langle 0 | \tau_{ik}(\mu, a) | 0 \rangle].$$

Нужно также доказать, что результат не зависит от вида обрезавшей функции. С этой целью воспользуемся формулой

$$\sum_{z_n > 0} \frac{f(z)}{s'(z_n)} = w + \int_0^{\infty} f(t) dt + i \int_0^{\infty} \left\{ \frac{f(it)}{\exp[-2\pi i s(it)] - 1} - \frac{f(-it)}{\exp[2\pi i s(-it)] - 1} \right\} dt \quad (7)$$

где $w=0$, если $s(0) \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и $w=f(0)/2s'(0)$, если $s(0)=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В (7) суммирование ведется по всем неотрицательным z_n , для которых $s(z_n)=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. При этом предполагается, что функции $s(z)$, $f(z)$ комплексной переменной $z=x+iy$ аналитичны в полуплоскости $x>0$, $s'(z_n) \neq 0$ и

$$\lim_{y \rightarrow \pm \infty} \Phi(x, y) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \Phi(x, y) = 0. \quad (8)$$

Здесь $\Phi(x, y) = f(z) \{1 - \exp[-2\pi i s(z) \text{sgn}(y)]\}^{-1}$. Доказательство равенства (7) не представляет особого труда. В литературе рассмотрен

его частный случай $s(z)=z$, известный под названием формулы Абеля—Плана ⁽¹¹⁾. Функцию $s(z)$ определим выражением ⁽³⁾

$$s_{\lambda}(z) = \begin{cases} -(1/\pi) \arctg[j_1(z)/n_1(z)] & \text{при } \lambda=0 \\ -(1/\pi) \arctg\{[z/j_1(z)]' / [zn_1(z)]'\} & \text{при } \lambda=1 \end{cases} \quad (9)$$

так, чтобы в (5) суммирование по ω (определяемое уравнениями (6)) велось по целочисленным значениям функции $s_{\lambda l}(\omega a)$. В (9) $n_1(z)$ — сферическая функция Неймана, а штрих над функцией означает производную по ее аргументу. Нетрудно видеть, что $j_1^2(z) = -j_{l-1}(z)j_{l+1}(z) = \pi s_{1l}'(z)/z^2$, когда $z = \omega a$. По этой причине функция $f(z)$, фигурирующая в (7), аналитична. С помощью асимптотических разложений функций Бесселя ⁽¹²⁾ можно убедиться, что $f(z)$ и $s(z)$ удовлетворяют условиям (8). Следовательно, обобщенная формула Абеля—Плана (7) применима к (5), и регуляризация τ_{lk} сводится к отбрасыванию первого интеграла в правой части (7). В результате

$$q = -\frac{\hbar c}{4\pi^3 a^4} \lim_{\mu \rightarrow +0} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \chi\left(\frac{\mu}{a} z\right) F_l^{(q)}(z, x) dz, \quad q = \varepsilon, p, p_{\perp}, \quad (10)$$

где

$$x = r/a < 1, \quad \chi(y) = [\psi(iy) + \psi(-iy)]/2,$$

$$F_l^{(q)} = z^2 \Omega_l(z) [li_{l+1}^2(zx) + (l+1)li_{l-1}^2(zx) - (2l+1)li_l^2(zx)], \quad (11)$$

$$F_l^{(p_{\perp})} = l(l+1)(2l+1) \frac{z}{x^2} \Omega_l(z) li_l^2(zx), \quad \Omega_l(z) = \frac{k_l(z)}{l_l(z)} + \frac{[zk_l(z)]'}{[zli_l(z)]'}.$$

а $li_l(z) \equiv \sqrt{\pi/2z} I_{l+1/2}(z)$, $k_l(z) \equiv \sqrt{\pi/2z} K_{l+1/2}(z)$ — модифицированные сферические функции Бесселя I и III рода ⁽¹²⁾. Для частного вида обрезающей функции $\psi(y) = e^{-y}$ соотношения (10), (11) были получены в ⁽⁵⁾ другим способом.

Анализ асимптотических разложений функций $F_l^{(q)}$ показывает, что в (10) интеграл и сумма сходятся настолько быстро, что к пределу $\mu \rightarrow 0$ можно переходить непосредственно под интегралом. Имеем (см. (11))

$$q = -\frac{\hbar c}{4\pi^3 a^4} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} F_l^{(q)}(z, x) dz, \quad q = \varepsilon, p, p_{\perp}, \quad (12)$$

независимо от выбора функции $\psi(\mu\omega)$ в области $0 < \omega < \infty$. За пределами проводящей сферы $x = r/a > 1$ с помощью аналогичных выкладок можно вновь прийти к результату (12), не зависящему от вида $\psi(\mu\omega)$. При этом новые $F_l^{(q)}(z, x)$ отличаются от (11) заменой функций $li_l(z)$, $k_l(z)$ местами.

Оказывается, что вакуумный тензор энергии-импульса удовлетворяет ковариантному уравнению гидродинамики $\tau_{i,k}^k = 0$. В сферически-симметрическом случае оно сводится к выражению

$$\frac{dp}{dr} + \frac{2}{r}(p - p_{\perp}) = 0, \quad (13)$$

в справедливости которого нетрудно убедиться, используя рекуррентные соотношения для i_l, k_l .

Простые выражения получаются в центре и на больших расстояниях от проводящей сферы. Здесь дают вклад только мультиполя $l=1$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(0) - \frac{\hbar c}{2\pi^2 a^4} \int_0^\infty \left[\left(\frac{z-1}{z+1} e^{2z} + 1 \right)^{-1} - \left(\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1} e^{2z} - 1 \right)^{-1} \right] z^3 dz = \\ = -0,03811 \frac{\hbar c}{a^4}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(0)}{3} = p(0) = p_\perp(0), \quad \varepsilon'(0) = p'(0) = p'_\perp(0), \quad \varepsilon(x) \approx -4p(x) \approx \\ \approx \frac{8}{5} p_\perp(x) \approx \frac{\hbar c}{2\pi^2 a^4 x^7}, \quad \text{при } x \gg 1. \end{aligned}$$

Вклад мультиполей высших порядков становится важным вблизи поверхности сферы. Для этого случая в (13) выведена формула

$$\varepsilon(x) \approx -\frac{\hbar c}{30\pi^2 a^4 (1-x)^3}, \quad x \approx 1. \quad (15)$$

Остальные компоненты τ_{ik} легко получаются из (13) и (15):

$$p(x) \approx -\frac{\hbar c}{60\pi^2 a^4 (1-x)^2}, \quad p_\perp(x) \approx \frac{1}{2} \varepsilon(x), \quad \left(\frac{\varepsilon(x)}{p(x)} \right)' = \left(\frac{p(x)}{p_\perp(x)} \right)' \approx -1, \quad x \approx 1. \quad (16)$$

Приведем также интегральное представление уравнения (13) с граничными условиями (14)

$$p(r) = \frac{1}{r^3} \int_{\eta(r)}^r \varepsilon(t) t^2 dt. \quad (17)$$

Здесь $\eta(r)$ равно нулю внутри сферы и ∞ за ее пределами. Из (16) и (17) вытекает, что заключенная внутри идеально проводящей сферы энергия вакуума—бесконечно большая отрицательная величина, а вне сферы—бесконечно большая положительная величина. При этом полная энергия $E = 4\pi a^2 \lim_{\delta \rightarrow +0} [p(a-\delta) - p(a+\delta)]$ конечна (см. (1)).

Исходя из (14)—(17) для компонент τ_{ik} можно записать следующие простые аппроксимационные формулы

$$p(x) \approx \frac{\varepsilon(0)}{3(1-x)^2} e^{-2x}, \quad p_\perp(x) \approx \varepsilon(0) \frac{1-x+x^2}{3(1-x)^3} e^{-2x} \quad \text{при } x < 1 \quad (18)$$

$$p(x) \approx -\frac{\hbar c e^{-2/x}}{8\pi^2 a^4 x^5 (x-1)^2}, \quad p_\perp(x) \approx \frac{\hbar c}{16\pi^2 a^4} \frac{2+5x(x-1)}{x^6 (x-1)^3} e^{-2/x} \quad \text{при } x > 1.$$

Результаты численных расчетов по формуле (12) приведены в таблице. Они позволяют вычислить относительную погрешность аппроксимаций (18), которая равна нескольким процентам. Величины $\varepsilon, p, p_\perp$ вычислены также и в (7,8) на основе формул, полученных в (5). В

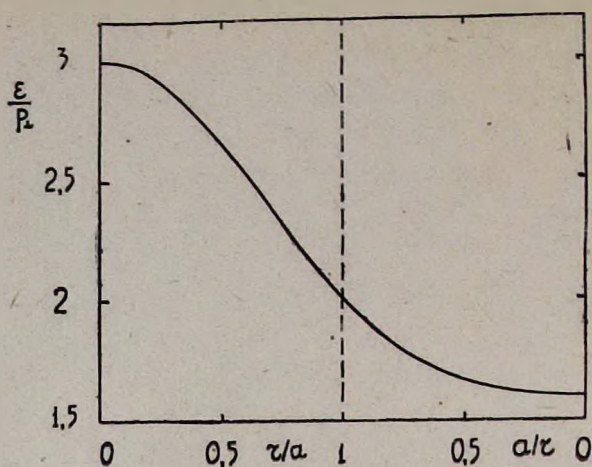


Рис. 1. Отношение плотности энергии вакуума ε к азимутальному давлению $p_{\perp}$ в зависимости от расстояния r до центра идеально проводящей сферической поверхности радиуса a . Величины ε , $p_{\perp}$ вычислены на ЭВМ по формуле (14).

r/a	ε	p	$p_{\perp}$	r/a	ε	p	$p_{\perp}$
0,0	-0,03811	-0,01270	-0,01270	1,0	∞	$-\infty$	∞
0,1	-0,03910	-0,01290	-0,01310	1,1	2,804	-0,1265	1,465
0,2	-0,04234	-0,01353	-0,01440	1,2	0,2940	-0,02379	0,158
0,3	-0,04866	-0,01470	-0,01698	1,3	0,0763	-0,008035	0,040 ₃
0,4	-0,06008	-0,01667	-0,02170	1,5	0,01157	-0,001728	0,006 ₅₁
0,5	-0,08137	-0,01998	-0,03069	1,7	0,003134	-5,496 10^{-4}	0,001 ₉₄₂
0,6	-0,1254	-0,0258	-0,04978	1,9	0,001115	-2,154 10^{-4}	6,948 10^{-4}
0,7	-0,2362	-0,03777	-0,09921	2,0	7,121 10^{-4}	-1,422 10^{-4}	4,468 10^{-4}
0,8	-0,6382	-0,06893	-0,2846	5,0	9,842 10^{-7}	-1,676 10^{-7}	4,455 10^{-7}
0,9	-4,127	-0,2193	-1,954	10,0	5,114 10^{-9}	-1,464 10^{-9}	3,309 10^{-9}
1,0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	100,0	5,066 10^{-16}	-1,449 10^{-16}	3,259 10^{-16}

этих работах авторы I_{ν} , K_{ν} заменили соответствующими асимптотическими разложениями, справедливыми при $\nu \gg 1$ ($\nu = l + 1/2$), и ограничились членами порядка $1/\nu$, не оценивая при этом допускаемую ошибку. Так как в (12) $\nu \geq 3/2$, то неясно, насколько оправданно такое приближение и верно ли оно вообще. Наши расчеты с использованием точных выражений для I_{ν} и K_{ν} позволяют определить относительную ошибку ($\sim 10\%$) результатов (^{7,8}). По точности они уступают простым формулам (18).

Авторы признательны академику АН Армянской ССР Г. С. Саакяну за интерес к работе и ценные стимулирующие обсуждения.

Институт прикладных проблем физики
Академии наук Армянской ССР

Լ. Շ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ա. Ա. ՍԱՀԱՐՅԱՆ

Կազմիւրի էֆեկտը իդեալական հաղորդիչ սֆերիկ մակերևույթի համար

Ուսումնասիրված է էլեկտրամագնիսական վակուումի վիճակը իդեալական հաղորդիչ սֆերիկ մակերևույթի ներսում և դրսում: Ապացուցված է, որ վակուումի էներգիայի-իմպուլսի թեճնզորը կախված չէ վերանորման եղանակից և

բավարարում է հիդրոդինամիկայի հավասարմանը: Հաշվված են այդ թեքերի բաղադրիչները և դրանց համար ստացված են պարզ անալիտիկ արտահայտություններ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях, Атомиздат, М., 1980. ² H. B. Casimir, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap., v. 51, p. 793 (1948). ³ T. H. Boyer, Phys. Rev., v. 174, p. 1764, (1968). ⁴ B. Davies, J. Math. Phys., v. 13, p. 1324 (1972). ⁵ K. A. Milton, L. L. De Raad, J. Schwinger, Ann. Phys., v. 115, p. 388 (1978). ⁶ K. Olaussen, F. Ravndall, Nucl. Phys., v. B 192, p. 237 (1981). ⁷ I. Brevik, H. Kolbenstvedt, Ann. Phys., v. 149, p. 237 (1983). ⁸ I. Brevik, H. Kolbenstvedt, Can. J. Phys., v. 62, p. 805 (1984). ⁹ В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Квантовая электродинамика, Наука, М., 1980. ¹⁰ Дж. Джексон, Классическая электродинамика, Мир, М., 1965. ¹¹ М. А. Евграфов, Аналитические функции, Наука, М., 1968. ¹² И. Стуган, М. Абрамовиц, Справочник по специальным функциям, М., Наука, 1979. ¹³ R. Balian, B. Duplantier, Ann. Phys., v. 112, p. (1978).