ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 1

УДК 593.12

ФИЗИКА

В. Н. Айрапетян, Ю. Н. Айрапетян

Вывод уравнения Эйнштейна—Фоккера—Планка с учетом краевых эффектов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Д. М. Седракяном 15/IV 1985)

Плотность вероятности перехода $w(t_0, x_0; t, x)$ из состояния x_0, которое система имела в момент t_0, в состояния, для которых x лежит между x и $x+dx$, к моменту t для цепи Маркова удовлетворяет интегральному уравнению Смолуховского (УС)

$$w(t_0, x_0; t+\tau, x)=\int w(t_0, x_0; t, z)w(t, z; t+\tau, x)dx, \tag{1}$$

где интегрирование распространено на всю область изменения x.

Для перехода от УС к дифференциальному уравнению Эйнштейна—Фоккера—Планка (УЭФП) (1) умножается на произвольную гладкую функцию $g(x)$, обращающуюся в нуль на границах области изменения $w(t_0, x_0; t+\tau, x)$ вместе со своей первой производной и интегрируется по всей области изменения $w(t_0, x_0; t+\tau, x)$. Далее $g(x)$ разлагается в ряд по степеням $(x-z)$ вокруг точки z. В результате получается

$$\int w(t_0, x_0; t+\tau, x)g(x)dx=\int w(t_0, x_0; t, z)g(z)dz\int w(t, z; t+\tau, x)dx+$$
$$+\int dz w(t_0, x_0; t, z)\int w(t, z; t+\tau, x)\Big\{g'(z)(x-z)+ \tag{2}$$
$$+\frac{g''(z)}{2!}(x-z)^2+\frac{g'''(z)}{3!}(x-z)^3+\ldots\Big\}dx.$$

В первом интеграле справа в (2) заменим переменную интегрирования z на x и перенесем его налево. Получим

$$\int g(x)\frac{w(t_0, x_0; t+\tau, x)-w(t_0, x_0; t, x)}{\tau}dx=\int w(t_0, x_0; t, z)\Big[g'(z)\frac{\overline{x-z}}{\tau}+$$
$$+\frac{g''(z)}{2!}\cdot\frac{\overline{(x-z)^2}}{\tau}+\frac{g'''(z)}{3!}\cdot\frac{\overline{(x-z)^3}}{\tau}+\ldots\Big]dz. \tag{3}$$

Введем обозначения

$$\lim_{\tau\to0}\frac{\overline{z-x}}{\tau}=\lim_{\tau\to0}\frac{1}{\tau}\int(z-x)w(t, x; t+\tau, z)dz=A(x, t); \tag{4}$$

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\overline{(z-x)^2}}{\tau}=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int(z-x)^2 w(t,\,x;\,t+\tau,\,z)dz=2B(x,\,t); \qquad (5)$$

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\overline{|z-x|^3}}{\tau}=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int(z-x)^3 w(t,\,x;\,t+\tau,\,z)dz=0. \qquad (6)$$

Условие (6)—это фактически и есть условие, допускающее переход к дифференциальному уравнению второго порядка (УЭФП).

Учтем теперь наличие «края». Очевидно, что при этом должно выполняться

$$w(t_0,\,x_0;\,t,\,x_{кр})\equiv 0 \qquad (7)$$

при $z\geqslant x_{кр}$. Действительно, по своему определению (смыслу) $w(t_0,\,x_0;\,t,\,x)$ появляется в результате введения статистического ансамбля (в результате „набора статистики"). В конкретном случае: в некоторую точку z в момент t_0 помещается N невзаимодействующих частиц, которые при $t>t_0$ начинают распространяться. Тогда $w(t_0,\,z;\,t,\,x_{кр})dx$ указывает вероятность попадания частицы в область $x_{кр}$, $x_{кр}+dx$. Так как в статистическом ансамбле $N\to\infty$, то статистика в принципе „набирается" и для „прикраевой" области (например, если первоначальное число частиц 10^6, а в „прикраевую" область попала одна, то для 10^{12} частиц число попавших в „прикраевую" область уже достаточно для „набора статистики"). При этом, однако, в соответствии с (7) при $N\to\infty$ ни одна частица не попадает в область $x\geqslant x_{кр}$.

Проведем в (3) интегрирование по частям. В силу условия (7) интегрирование нужно проводить не до $+\infty$, а до $x_{кр}$. При этом $g(x)$ таково, что $g(x_{кр})=0$ и $g'(x_{кр})=0$. Используя обозначения, введенные в (4), (5), и интегрируя первый член в (3) справа по частям, получим:

$$A(t,\,z)w(t_0,\,x_0;\,t,\,z)g(z)\Big|_{z=-\infty}^{z=x_{кр}}-\int g(z)\frac{\partial}{\partial z}[A(t,\,z)w(t_0,\,x_0;\,t,\,z)]dz. \qquad (8)$$

Дважды интегрируя по частям второй член справа, в (3) получим:

$$g'(z)B(t,\,z)w(t_0,\,x_0;\,t,\,z)\Big|_{z=-\infty}^{z=x_{кр}}-g'(z)\frac{\partial}{\partial z}[B(t,\,z)w(t_0,\,x_0;\,t,\,z)]dz=$$

$$=g(z)\frac{\partial}{\partial z}[B(t,\,z)w(t_0,\,x_0;\,t,\,z)]\Big|_{z=-\infty}^{z=x_{кр}}-\int g(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}[B(t,\,z)w(t_0,\,x_0;\,t,\,z)]dz. \qquad (9)$$

Учитывая, что на границах интервала интегрирования $g(z)=0$; $g'(z)=0$, изменяя обозначения переменной интегрирования в (8), (9) с z на x, получим в (3):

$$\int g(x)\left\{\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[A(t,\,x)w]-\frac{\partial^2}{\partial x^2}B(t,\,x)w\right\}dx=0. \qquad (10)$$

Так как это уравнение должно иметь место для произвольных $g(x)$ (обращающихся в нуль вместе с $g'(x)$ на границах области интегрирования), то плотность вероятности перехода $w(t_0,\,x_0;\,t,\,x)$ должна удовлетворять УЭФП

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(t, x)w] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(t, x)w]. \quad (11)$$

Условием, допускающим переход от интегрального УС к дифференциальному УЭФП, является (6). Исследуем поведение этого выражения (его применимость) при приближении x к $x_{кр}$. Условие (6) легко понять, если принять во внимание, что для малых $|z-x|$, $|z-x|^3$ очень мала, а с ростом $|z-x|w(t, x; t+\tau, z)$ должна убывать столь быстро, что члены, пропорциональные $\sim|z-x|^n w(t, x; t+\tau, z)\to 0$, стремятся к нулю вместе с $\tau\to 0$. Именно это требование позволяет рассматривать x как непрерывно изменяющуюся величину. Заметим, что выводы, полученные с помощью этого условия, неприменимы для очень малых промежутков времени, например, для броуновского движения в газе, если под x подразумевать скорость движения частицы и считать, что в момент соударения она меняется мгновенно (см. ([1])). Условие (7) логично дополнить следующим:

$$w(t, z; t+\tau, x_{кр}) = 0, \quad (12)$$

если

$$|x_{кр} - z| \geqslant v\tau, \quad (13)$$

где v—скорость (максимальная) перемещения частицы. Физически это условие понятно. Вероятность перехода определяется возможностью (хотя бы в принципе) для определенной (пусть хотя бы единственной) частицы ансамбля совершить перескок. Условие (6) (необходимое для возможности перехода от УС к УЭФП) в случаях, когда оно выполняется для $w(t, x; t+\tau, z)$ с бесконечными „хвостами", будет выполняться и для „обрезанных" в смысле (7), (12), (13) $w(\ldots)$, так как вклад, даваемый в интеграл областью „хвостов", мал (с ростом $|x-z|$ $w(t_0, z; t+\tau, x)$ быстроубывающая функция).

Подчеркнем, что интегрирование по частям в (3) допустимо, если выполняются условия:

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}} \sum_i \int_{x_i-\delta_i}^{x_i+\delta_i} g(x)\frac{\partial}{\partial z}[A(t, z)w(t_0, x_0; t, z)]\,dz = 0; \quad (14)$$

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}} \sum_i \int_{x_i-\delta_i}^{x_i+\delta_i} \frac{\partial}{\partial z}[g'(z)B(t, z)w(t_0, x_0; t, z)]\,dz = 0; \quad (15)$$

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}} \sum_i \int_{x_i-\delta_i}^{x+\delta_i} \left\{g(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}[B(t, z)w(t_0, x_0; t, z)]\right\} dz = 0. \quad (16)$$

Здесь x_i—точки, в которых подынтегральные выражения в (14)—(16) имеют особенности, т. е. интегрирование по частям оказывается допустимым, когда интегралы в (14)—(16) существуют хотя бы в смысле несобственных ([2]).

При выполнении условий (14)—(16) переход от УС к УЭФП допустим и в «прикраевой» области. Однако значения коэффициентов $A(t, x)$, $B(t, x)$ уже не будут теми же, что и во „внутренних" областях. Действительно, условие (7) приводит к тому, что $A(t, x)$ и $B(t, x)$ задаются выражениями (4), (5) с верхним пределом интегрирования, равным $x_{кр}$ (а не ∞, как для „внутренней“ области). Последнее же обстоятельство приводит к тому, что даже если во „внутренней“ области $w(\ldots)$ обладает изотропностью и однородностью (следовательно, как легко убедиться, $A(t, x)=0$), то в „прикраевой“ области он не равен нулю и, более того, в УЭФП соответствующий член оказывается определяющим.

Например, полагая

$$w(t, x; t+\tau, z)=\begin{cases} \frac{1}{2\tau}\delta(z-x, h) & z<x-h \\ \frac{1}{2\tau}\delta(z-x, -h) & z>x-h, \end{cases} \tag{17}$$

мы получим дискретную модель случайного блуждания, изученную нами в ([3]) и подтверждающую в этом частном случае изложенный выше вывод.

Авторы глубоко признательны Д. М. Седракяну и А. О. Меликяну за стимулирующий интерес к работе и полезные замечания.

Ереванский государственный университет

Վ. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ, ՅՈՒ. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

Էյնշտեյն—Ֆոկեր—Պլանկի հավասարման արտածումը եզրային էֆեկտների հաշվարկմամբ

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ եզրի առկայության դեպքում Սմոլուխովսկու ինտեգրալ հավասարումից կարելի է ստանալ ԷՖՊ հավասարումը։ Այդ հավասարման գործակիցները այնպիսին են, որ «ամպ» ներքին անդամում ստացվում է ԷՖՊ հայտնի հավասարումը, ընդ որում «Մերձեզրային» տիրույթում գործակիցների տեսքը տարբերվում է առայժմ հայտնի տեսքից։ Ստացվում են նաև պայմաններ, որոնք թույլ են տալիս անցում կատարել ինտեգրալ Սմոլուխովսկու հավասարումից դիֆերենցիալ ԷՖՊ-ին՝ «եզրի» հաշվարկմամբ։ Կոլմագորովի հայտնի պայմաններն էապես լրացվում են, նեղացնելով, այդպիսով, այն ֆունկցիաների հնարավոր դասը, որոնք բավարարում են դիֆերենցիալ ԷՖՊ հավասարմանը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. А. Леонтович,* Статистическая физика, Наука, М., 1983. [2] *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон,* Курс современного анализа, т. 1, Физматгиз, М., 1963. [3]. *В. Н. Айрапетян, Ю. Н. Айрапетян,* ДАН АрмССР, т. 81, № 1 (1985).