ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXIII 1986 1

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

Г. Г. Геворкян

О представлении измеримых функций абсолютно сходящимися рядами по системе Франклина

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 20/III. 1985)

В работе [1] доказано, что для любой почти всюду конечной измеримой функции $f(x)$ существует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ по системе Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, который почти всюду абсолютно сходится к $f(x)$. В той же работе доказано, что для любой почти всюду конечной измеримой функции $f(x)$ и любого положительного ε существует функция $g(x)$ такая, что

1) $\mu\{x\in[0, 1]: f(x)\neq g(x)\}<\varepsilon$;

2) ряд Фурье—Хаара функции $g(x)$ абсолютно сходится.

В работах [2,3] доказана возможность представления измеримых функций абсолютно сходящимися рядами по другим системам.

В настоящей заметке аналогичные теоремы доказываются для рядов по системе Франклина (о системе Франклина см. например [4—6]).

Верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любой почти всюду конечной измеримой функции $f(x)$ существует ряд по системе Франклина, который почти всюду абсолютно сходится к $f(x)$.*

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ почти всюду конечная измеримая функция. Тогда для любого положительного ε существует функция $g(x)$ такая, что*

1) $\mu\{x\in[0, 1]: f(x)\neq g(x)\}<\varepsilon$;

2) *ряд Фурье—Франклина функции $g(x)$ абсолютно равномерно сходится, т. е. равномерно сходится ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1 g(t)f_n(t)dt\right||f_n(x)|,$$

где $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$—ортонормированная система Франклина.

Лемма 1. *Пусть $[a, b]\subset[0, 1]$ отрезок с двоично-рациональными концами, $0<\varepsilon<1$, $\delta>0$, $\gamma>0$ и N любое натуральное число. Тогда существует полином по системе Франклина $\sum_{n=N+1}^{M} a_nf_n(x)$ такой, что*

1) $\sum_{n=N+1}^{M} a_nf_n(x)=0$, *когда* $x\notin[a, b]$;

2) $\sum\limits_{n=N+1}^{M}|a_nf_n(x)|<\gamma$ *для любого* $x\in[a-\delta,\ b+\delta]$;

3) $\sum\limits_{n=N+1}^{M}|a_nf(x)|<\frac{c}{\varepsilon^2}$, *где c—некоторая абсолютная константа;*

4) $\sum\limits_{n=N+1}^{M}a_nf_n(x)=1$, *когда* $x\in A$, *где* $A\subset[a,b]$ *и* $\mu(A)>(1-\varepsilon)(b-a)$.

Доказательство. Выберем натуральное q такое, что

$$2^{3-q}\leqslant\varepsilon<2^{4-q}. \tag{1}$$

Пусть $a=\frac{m_1}{2^{k_1}}$ и $b=\frac{m_2}{2^{k_2}}$. Разделим отрезок $[a,b]$ на равные интервалы $\Delta_i=\left[a+\frac{i-1}{2^k},\ a+\frac{i}{2^k}\right]$ длины 2^{-k}, где $k\geqslant\max(k_1,k_2)$ (число k пока не фиксировано, оно будет выбрано позже). Определим непрерывные функции $\varphi_i(x)$ следующим образом:

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}0, \text{ когда } x\notin\Delta_i\\ 1, \text{ когда } x\in\left[a+\frac{i-1}{2^k}+\frac{3}{2^{k+q}},\ a+\frac{i}{2^k}-\frac{3}{2^{k+q}}\right],\\ 2^{q-1}-2{,}5, \text{ когда } x=a+\frac{i-1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+q}} \text{ или } x=a+\frac{i}{2^k}-\frac{1}{2^{k+q}},\\ 0, \text{ когда } x=a+\frac{i-1}{2^k}+\frac{2}{2^{k+q}} \text{ или } x=a+\frac{i}{2^k}-\frac{2}{2^{k+q}},\\ \text{линейная на остальных отрезках.}\end{cases} \tag{2}$$

Легко видеть, что

$$\int\limits_{\Delta_j}\varphi_i(x)dx=0 \text{ для любых } i \text{ и } j \tag{3}$$

и

$$\int\limits_{\Delta_j}x\varphi_i(x)dx=0 \text{ для любых } i \text{ и } j. \tag{4}$$

Обозначим $\varphi(x)=\sum\limits_i\varphi_i(x)$.

Учитывая, что функции Франклина $f_n(x)$ с номерами $n\leqslant2^k$ линейны на отрезках Δ_j, из (3) и (4) следует

$$\int\limits_0^1\varphi(x)f_n(x)dx=0,\ n=0,1,2,\ldots,2^k. \tag{5}$$

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nf_n(x)$ ряд Фурье—Франклина функции $\varphi(x)$. Учитывая (5), (2) и интерполяционные свойства системы Франклина (см. ([6])), имеем

$$\varphi(x)=\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+q+1}}a_nf_n(x). \tag{6}$$

При достаточно больших k из (6), (2), (1) следуют условия 1 и 4. Для коэффициентов a_n имеем (см. [6]))

$$|a_n|=\left|\int\limits_0^1 \varphi(x)f_n(x)dx\right|\leqslant\|\varphi\|_\infty\cdot\|f_n\|_1<c_1\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}2^q. \tag{7}$$

Откуда получаем (см. [5], формула (3, 4))

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+q+1}}|a_nf_n(x)|=\sum_{\mu=k}^{k+q}\sum_{n=2^\mu+1}^{2^{\mu+1}}|a_nf_n(x)|<c_2\sum_{\mu=k}^{k+q}2^{\frac{\mu}{2}}\cdot\sup_{2^\mu+1\leqslant n\leqslant 2^\mu+1}|a_n|<$$

$$<c2^{2q}<\frac{c}{\varepsilon^2}. \tag{8}$$

Остается доказать условие 3. Пусть $t\notin[a-\delta, b+\delta]$, t_n определено, как в [6], формулой (2.2). Обозначим через $\rho(x, A)$ расстояние точки x от множества A. Тогда, используя оценки З. Чисельского для функций системы Франклина (см. [6], (6.1)), получим (где $0<q<1$)

$$|a_nf_n(t)|\leqslant c_3|a_n|n^{\frac{1}{2}}q^{n|t-t_n|}=c_3n^{\frac{1}{2}}q^{n|t-t_n|}\left|\int\limits_a^b\varphi(x)f_n(x)dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant c_4nq^{n|t-t_n|}n^{\frac{1}{2}}q^{n\cdot\rho(t_n,(a,b))}\cdot\|\varphi\|_1<c_4nq^{n(|t-t_n|+\rho(t_n,(a,b)))}. \tag{9}$$

Учитывая, что $|t-t_n|+\rho(t_n, (a, b))>\rho(t, (a, b))\geqslant\delta$, из (9) получим

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+q+1}}|a_nf_n(t)|\leqslant c_4\sum_{n=2^k+1}^{\infty}n\cdot q^{n\delta}. \tag{10}$$

Учитывая, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}nq^{n\delta}$ сходится для любого $\delta>0$, можно k выбрать настолько большим, чтобы $c_4\sum\limits_{n=2^k+1}^{\infty}nq^{n\delta}<\gamma$. Откуда следует условие 2 леммы 1. Лемма доказана.

Из леммы 1 легко получается

Лемма 2. *Пусть $\varphi(x)$ ступенчатая функция и ε любое положительное число. Тогда для любого натурального N существует полином по системе Франклина $\sum\limits_{n=N+1}^{M}a_nf_n(x)$ такой, что*

1) $\sum\limits_{n=N+1}^{M}a_nf_n(x)=\varphi(x)$, когда $x\in A$, где $A\subset[0, 1]$ и $\mu A>1-\varepsilon$;

2) $\sum\limits_{n=N+1}^{M}|a_nf_n(x)|<c_5\cdot\dfrac{\|\varphi\|_\infty}{\varepsilon^2}$.

Теорема 1 доказывается с помощью этих лемм, по методу работ [1-3].

Доказательство теоремы 2. Без ограничения общности функцию можно считать непрерывной. Пусть $\varepsilon_k=2^{-k}\varepsilon$, $k=1, 2, \ldots$ и $\delta_k=\varepsilon_{k+1}^3$. Существуют ступенчатые функции $\psi_n(x)$ такие, что

$$\|\varphi_k-f\|_\infty<\delta_k,\ k=1, 2, \ldots \tag{11}$$

Из (10) следует, что для функций $\psi_k=\varphi_k-\varphi_{k-1}$, где $\varphi_0=0$, имеем

$$\|\psi_k\|<2\delta_{k-1},\quad n\geqslant 2 \tag{12}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(x)\rightrightarrows f(x). \tag{13}$$

Из леммы 2 следует существование полиномов по системе Франклина, обладающих следующими свойствами:

$$\sum_{n=N_k}^{M_k}|a_n f_n(x)|<c_5\frac{\|\psi_k\|_\infty}{\varepsilon_k^2}<2c_5\cdot\varepsilon_k,$$

$$N_1<M_1<N_2<\ldots<M_k<N_{k+1}<\ldots$$

$$\sum_{n=N_k}^{M_k}a_n f_n(x)=\psi_k(x),\ \text{когда}\ x\in A_k,\ \text{где}\ \mu A_k>1-\varepsilon_k.$$

Легко видеть, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n f_n(x)$ требуемый ряд. Теорема 2 доказана.

Ереванский государственный университет

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Չափելի ֆունկցիաները ըստ Ֆրանկլինի համակարգի բացարձակ զուգամետ շարքերով ներկայացման վերաբերյալ

Աշխատանքում ապացուցված են հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 1. Կամայական համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի $f(x)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n f_n(x)$ շարք, որը համարյա ամենուրեք բացարձակ զուգամիտում է $f(x)$-ին, որտեղ $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$-ը Ֆրանկլինի օրթոնորմավորված համակարգն է:

Թեորեմ 2. Կամայական համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի $f(x)$ ֆունկցիայի և կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $g(x)$ ֆունկցիա այնպես, որ

1. $\mu\{x:f(x)\neq g(x)\}<\varepsilon$
2. $g(x)$-ի Ֆուրյե—Ֆրանկլինի շարքը բացարձակ հավասարաչափ զուգամետ է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Г. Арутюнян,* ДАН АрмССР, т. 42, №3, с. 134—140 (1966). [2] *Р. С. Давтян,* Мат. заметки, т. 19 с. 673—680 (1976). [3] *G. G. Gevorkian,* Analysis math., v. 8 (4) p. 239—256 (1982). [4] *Z. Ciesielski,* Studia Math., v. 23, p. 141—157 (1963). [5] *Z. Ciesielski,* ibidem, v. 27, p. 289—323 (1966). [6] *Z. Ciesielski,* Sdudi Math., v. 53, p. 277—301 (1975).