ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ԼXXXIII 1986 1

УДК 519.248:531.9

МАТЕМАТИКА

Д. Г. Мартиросян

О фазовой диаграмме модели Поттса

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 7/III 1985)

Пусть Z^ν—ν-мерная целочисленная решетка, $\nu\geqslant 2$. Расстояние между двумя точками $x, y\in Z^\nu$, $x=(x_1, \ldots, x_\nu)$, $y=(y_1, \ldots, y_\nu)$, определим как $d(x, y)=\sum_{i=1}^{\nu}|x_i-y_i|$. Мы будем рассматривать модель Поттса, в которой спин $\varphi(x)$, $x\in Z^\nu$ принимает значения в конечном множестве $Q=\{1, \ldots, q\}$, а формальный гамильтониан записывается в виде

$$H=-\sum_{<x,y>}\delta_{\varphi(x),\varphi(y)},\quad \varphi(x),\ \varphi(y)\in Q, \tag{1}$$

где суммирование производится по всем парам ближайших соседей x, y на решетке Z^ν и δ—символ Кронекера.

Котецки и Шлосман [1], используя метод положительной отражательности, доказали наличие в этой модели точки $\beta_c>0$ сосуществования $(q+1)$ фаз при больших q. Другой подход к решению этой задачи, основанный на применении контурной техники, был предложен Динабургом и Синаем в [2] и независимо от них Брикмонтом, Куродой и Лебовицем.

В настоящей работе приводится полное описание трансляционно-инвариантных гиббсовских состояний в модели Поттса, задаваемой гамильтонианом (1), при всех $\nu\geqslant 2$, при любых β и достаточно больших q.

Теорема. *Для любого* $\nu\geqslant 2$ *найдется* $q_0(\nu)$ *такое, что при всех* $q>q_0(\nu)$ *для гиббсовских состояний, описываемых гамильтонианом* (1) *и параметрами* β, q, *справедливо следующее утверждение. Существует* β_c *такое, что*

1. *При* $\beta=\beta_c(q)$ *имеется в точности* $(q+1)$ *гиббсовских состояний* $P^{(0)}, P^{(1)}, \ldots, P^{(q)}$ *(чистых фаз) таких, что любое трансляционно-инвариантное гиббсовское состояние* P *представимо в виде*

$$P=\alpha_0P^{(0)}+\ldots+\alpha_qP^{(q)},\ \text{где } \alpha_i\geqslant 0\ \forall i \text{ и } \sum\alpha_i=1.$$

2. *При* $\beta>\beta_c(q)$ *имеется в точности* q *гиббсовских состояний* $P_\beta^{(1)}, \ldots, P_\beta^{(q)}$ *таких, что любое трансляционно-инвариантное состояние представимо в виде*

$$P=\alpha_1P_\beta^{(1)}+\ldots+\alpha_qP_\beta^{(q)},\ \text{где } \alpha_i\geqslant 0\ \forall i \text{ и } \sum\alpha_{i_1}=1.$$

3. *При $\beta<\beta_c(q)$ гиббсовское состояние единственно в классе всех гиббсовских состояний с заданными значениями параметров.*

Заметим, что, пользуясь другими методами, Лане, Мессаже и Руис получили аналогичный результат, но только в случае $\nu=2$.

Приведем набросок доказательства теоремы. Для этого заметим, что, как известно ([2]), при достаточно больших q найдется такое значение параметра $\beta_c(q)$, при котором можно построить q обычных контурных моделей и одну контурную модель с взаимодействием так, что каждая из этих контурных моделей описывает гиббсовское случайное поле с заданными значениями параметров. Отправляясь от этих контурных моделей, мы строим q новых контурных моделей при $\beta>\beta_c(q)$ и одну контурную модель при $\beta<\beta_c(q)$ таким образом, что гиббсовские случайные поля, отвечающие этим контурным моделям, являются крайними точками совокупности гиббсовских состояний. Это составляет содержание приводимых ниже основных лемм. Начнем с определений. Заметим сначала, что значение упомянутого выше параметра $\beta_c(q)$, существование которого установлено в ([1]), ([2]), является значением обратной температуры (так называемым критическим значением), при котором происходит фазовый переход первого рода. Из теоремы 1 вытекает, что все значения для $\beta_c(q)$ совпадают, однако в дальнейшем изложении мы этого не будем предполагать. Поэтому для определенности можно считать, что $\beta_c(q)$ совпадает со значением, найденным в ([2]). Далее, конфигурацией $\varphi(V)$ на множестве $V\subset Z^\nu$ будем называть любое отображение $\varphi: V\to Q$, где множество $Q=\{1, 2, \ldots, q\}$ значений спина было введено выше. Будем говорить, что конфигурация φ находится в фазе p, $1\leqslant p\leqslant q$, в точке $x\in Z^\nu$, если $\varphi(x)=p$, причем $\varphi(y)=\varphi(x)=p$ для всех y таких, что $d(x, y)=1$, и находится в фазе 0 в точке x, если из $d(x, y)=1$ следует $\varphi(y)\neq\varphi(x)$. Если конфигурация φ не находится ни в одной из фаз $0, 1, \ldots, q$ в точке $x\in Z^\nu$, то x называется неправильной точкой конфигурации φ. Располагая множеством неправильных точек конфигурации, можно общепринятым способом (см. ([2])) ввести понятие границы $B(\varphi)$ конфигурации φ. Как известно, это дает возможность ввести важное понятие контура. Контуры мы будем обозначать через $\gamma^{(p)}$, считая, что p является значением фазы лишь в точках, примыкающих к контуру извне. Через $\Xi^{(p)}(\gamma^{(p)}, \beta)$ будем обозначать кристаллическую статистическую сумму контура $\gamma^{(p)}$, при значении параметра β, через $Z(\gamma^{(p)}|F)$ — кристаллическую статистическую сумму $\gamma^{(p)}$, соответствующую контурному функционалу F. Далее, точку $x\in Z^\nu$ будем называть устойчивой для конфигурации φ, если φ находится в фазе $p\neq0$ в точке x при $\beta>\beta_c(q)$, в фазе 0 при $\beta<\beta_c(q)$ и может находиться в любой фазе $0, 1, \ldots, q$ при $\beta=\beta_c(q)$. Наконец, для конфигурации φ обозначим через $V^{(u)}(\varphi)$ объединение всех связных компонент множества неустойчивых точек конфигурации φ, примыкающих к границе ∂V, а через $P_V(\,\cdot\,|\varphi(Z^\nu\setminus V))$ обозначим распределение Гиббса в объеме V с граничными условиями $\varphi(Z^\nu\setminus V)$ вне V.

Лемма 1. *Для любого $\nu\geqslant2$ найдется $q_0(\nu)>0$ такое, что для всех $q>q_0(\nu)$*

а) *при* $\beta \geqslant \beta_c(q)$ *существуют* q *контурных функционалов* $\{F^{(p)}(\gamma^{(p)}, \beta)\}$, $p=1, 2, \ldots, q$, *таких, что*

$$\Xi^{(p)}(\gamma^{(p)}, \beta) = Z\{\gamma^{(p)} | F^{(p)}(\,\cdot\,, \beta)\}, \quad p=1, 2, \ldots, q, \tag{2}$$

где функция $F^{(p)}(\gamma^{(p)}, \beta)$ *монотонно возрастает по* β *при* $\beta \geqslant \beta_0$ *для любых фиксированных* p, $1 \leqslant p \leqslant q$, *и контура* $\gamma^{(p)}$;

б) *при* $\beta \leqslant \beta_c(q)$ *существуют функционал* $\{F^{(0)}(\gamma^{(0)}, \beta)\}$ *и взаимодействие* $G^{(0)}$ *такие, что*

$$\Xi^{(0)}(\gamma^{(0)}, \beta) = Z({}^{(0)} | F^{(0)}, G^{(0)}). \tag{3}$$

Здесь функция $G^{(0)}$ *не зависит от* β, *а* $F^{(0)}(\gamma^{(0)}, \beta)$ *монотонно убывает по* β *при* $\beta \leqslant \beta_c$.

Доказательство этой леммы существенно опирается на результаты работы (3).

Лемма 2. *Пусть* $\nu \geqslant 2$ *и последовательность кубов* $V_1 \subset \ldots \subset \subset V_n \subset \ldots$ *такова, что* $\bigcup V_n = \mathbf{Z}^\nu$, *а граничные условия* $\varphi_n(\mathbf{Z}^\nu \setminus V_n)$ *вне* V_n *произвольны. Для числа* $q_0(\nu)$ *из предыдущей леммы и любого значения* β *обратной температуры найдется такое* $c(\beta, q)$ *при* $q > q_0(\nu)$, *что*

$$\lim P_{V_n}(\varphi(V_n) : |V^{(a)}(\varphi)| > c(\beta, q)|\partial V| \,|\, \varphi_n(\mathbf{Z}^\nu \setminus V_n)) = 0$$

равномерно по всем граничным условиям.

Результаты, сформулированные в теореме, получаются из этих лемм путем не очень сложных выкладок, методика которых достаточно хорошо известна. Однако последнее утверждение теоремы может быть получено из приведенных лемм лишь в классе трансляционно-инвариантных гиббсовских состояний. Общее утверждение требует привлечения значительно более сложных построений. Доказательства лемм, особенно центральной леммы 2, носят конструктивный характер и основаны на специальном подборе особых множеств конфигураций и сравнении их вероятностей.

Приношу благодарность Е. И. Динабургу и Я. Г. Синаю за полезные обсуждения.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Դ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Փոթսի մոդելի ֆազային դիագրամի վերաբերյալ

Աշխատանքում դիտարկվում է Փոթսի մոդելը β *պարամետրով և* q*-արժեք սպինով։ Ապացուցվում է կրիտիկական* β_c *ջերմաստիճանի հակադարձ արժեքի միակությունը։ Պարզվում է, որ* $\beta=\beta_c$ *դեպքում կարելի է նշել ճիշտ* $q+1$ *այնպիսի Գիբսի բաշխումներ, որ ցանկացած տրանսլյացիոն ինվարիանտ Գիբսի բաշխումը պատկանում է նրանց ուռուցիկ թաղանթին։ Իսկ* $\beta > \beta_c$ *դեպքում գոյություն ունեն ճիշտ* q *Գիբսի բաշխումներ, որոնց ու-*

ռուցիկ թաղանթը պարունակում է ցանկացած տրանսլյացիոն-ինվարիանտ Գիբսի բաշխում։ Վերջապես $\beta<\beta_c$ դեպքում Գիբսի բաշխումը միակն է պարամետրերի տվյալ արժեքներ ունեցող Գիբսի բոլոր բաշխումների դասում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. Kotecky, S. B. Shlosman*, Commun. Math. Phys., v. 83, 493—515 (1982). [2] *Е. И. Динабург, Я. Г. Синай*. Тр. конф. по мат. физике, Дубна, август, 1984. [3] *Р. А. Минлос, Я. Г. Синай*, Тр. Моск. мат. о-ва, т. 17, 213—242 (1967).