ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.13

Ву Ким Туан

## О факторизации интегральных преобразований типа свертки в пространстве $L_2^\Phi$

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 13/II 1985)

В работе [1] было показано, что любое классическое интегральное преобразование типа свертки [2] на полупрямой (исключая преобразование Меллина) факторизуется через композиции более простых интегральных преобразований и порядок композиции зависит от свойств оригинала и составляющих операторов. В настоящей статье такая зависимость и сама возможность факторизации исследуются в пространстве $L_2^\Phi$, введенном в [3,4].

Определение 1. *$H$-преобразовснием функции $f(x)\in L_2(0,\infty)$ называется следующий интеграл:*

$$(Hf)(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma H(s)f^*(1-s)x^{-s}ds, \tag{1}$$

*сходящийся в среднем квадратичном. Здесь $f^*(s)\in L_2(\sigma)$—преобразование Меллина функции $f(x)$ [4,5], $\sigma=\{s,\ \mathrm{Re}\,s=1/2\}$, а*

$$H(s)=\Gamma\left[\begin{array}{l} a_1+\alpha_1 s,\ \ldots,\ a_A+\alpha_A s,\ b_1-\beta_1 s,\ \ldots,\ b_B-\beta_B s\\ c_1+\gamma_1 s,\ \ldots,\ c_C+\gamma_C s,\ d_1-\delta_1 s,\ \ldots,\ d_D-\delta_D s\end{array}\right] \tag{2}$$

*—образ ядра $H$-преобразования; компоненты векторов $(\alpha_A)$, $(\beta_B)$, $(\gamma_C)$, $(\delta_D)$ предполагаются положительными, а компоненты векторов $(a_A)$, $(b_B)$, $(c_C)$, $(d_D)$—комплексными, причем*

$$\mathrm{Re}\,a_i+\alpha_i/2\neq -n,\ i=\overline{1,A};\ \mathrm{Re}\,b_i-\beta_i/2\neq -n,\ i=\overline{1,B}; \tag{3}$$

$$\mathrm{Re}\,c_i+\gamma_i/2\neq -n,\ i=\overline{1,C};\ \mathrm{Re}\,d_i-\delta_i/2\neq -n,\ i=\overline{1,D};\ n=0,1,2,\ldots.$$

Отметим, что все классические преобразования типа свертки (Лапласа, Стилтьеса, Ханкеля, Харди, Мейера, Нараина... [2,5–8]) и им обратные являются частными случаями $H$-преобразования.

Упорядоченную пару $(\varkappa,\mu)$, где

$$\varkappa=\sum_{j=1}^{A}\alpha_j+\sum_{j=1}^{B}\beta_j-\sum_{j=1}^{C}\gamma_j-\sum_{j=1}^{D}\delta_j, \tag{4}$$

$$\mu=(A+B-C-D)/2+\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{C}c_j+\sum_{j=1}^{D}d_j-\sum_{j=1}^{A}a_j-\sum_{j=1}^{B}b_j\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{B}\beta_j+\sum_{j=1}^{C}\gamma_j-\sum_{j=1}^{A}\alpha_j-\sum_{j=1}^{D}\delta_j\right), \tag{5}$$

назовем характеристическим числом $H$-преобразования (1).

Теорема 1. *Пусть* $2\operatorname{sgn}\varkappa+\operatorname{sgn}\mu\geqslant 0$. *Тогда $H$-преобразование* (1) *существует и представимо в виде*

$$(Hf)(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty h_1(xy)f(y)\frac{dy}{y}, \tag{6}$$

$$h_1(x)=\frac{x}{2\pi i}\int\limits_\sigma \frac{H(s)}{1-s}(x^{-s}ds). \tag{7}$$

*Если еще* $2\operatorname{sgn}\varkappa+\operatorname{sgn}(\mu-1/2)>0$, *то $H$-преобразование* (1) *может быть записано и в следующей форме:*

$$(Hf)(x)=\int\limits_0^\infty h(xy)f(y)dy, \tag{8}$$

$$h(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\sigma H(s)x^{-s}ds, \tag{9}$$

*причем интегралы (7) и (9) сходятся в среднем квадратичном.*

Отметим, что формулы (6), (8). соответственно осуществляют классические преобразования типа свертки и Ватсона [4,5,9].

Преобразование (1) в случае $2\operatorname{sgn}\varkappa+\operatorname{sgn}\mu<0$ при переходе к оригиналам приводит к оператор-функциям [3,4,10].

Определение 2. *Пусть* $2\operatorname{sgn}\alpha+\operatorname{sgn}\beta\geqslant 0$. *Пространством* $L_2^{(\alpha,\beta)}$ *называется множество таких функций $f(x)$ на* $(0,\infty)$, *что*

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\sigma e^{-\alpha\pi s/2}s^{-\beta}F(s)x^{-s}ds,\quad F(s)\in L_2(\sigma). \tag{10}$$

Очевидно, что множество пространств $L_2^{(\alpha,\beta)}$ вполне упорядочено:

$$L_2^{(\alpha',\beta')}\subset L_2^{(\alpha,\beta)} \text{ при } 2\operatorname{sgn}(\alpha'-\alpha)+\operatorname{sgn}(\beta'-\beta)>0, \tag{11}$$

и что $L_2^{(0,0)}\equiv L_2(0,\infty)$.

Замечание. *Если* $\alpha>0$ и $\beta$ *фиксированы, то существует функция $\Phi(s)$ из класса $\mathscr{P}$* [4] *такая, что* $L_2^{(\alpha,\beta)}=L_2^{\Phi}$.

Теорема 2. а) *Пространство* $L_2^{(0,\beta)}$ *состоит из функций $f(x)$, представимых в виде* $f(x)=x^{-\beta}I_{0+}^{\beta}\varphi(x)$, *где* $\varphi(x)\in L_2(0,\infty)$, *а* $I_{0+}^{\beta}$ — *оператор дробного интегродифференцирования* [1,2,4]. б) *Пространство* $L_2^{(\alpha,\beta)}$ *при* $\alpha>0$ *состоит из функций $f(x)$, для которых существуют такие зависящие только от $f$ постоянные числа* $M_f>0$, *что*

$$\left\|\left(x\frac{d}{dx}\right)^m\prod_{k=1}^n\left(1-\frac{2\alpha x}{(m+k-\alpha-\beta-1/2)}\frac{d}{dx}\right)f(n^{2\alpha}x)\right\|_2<M_f,\quad n=1,2,3,\ldots, \tag{12}$$

*где $m$ — некоторое натуральное число, причем* $m>\alpha+\beta$.

Теорема 3. *$H$-преобразование (1) существует в пространстве* $L_2^{(\alpha,\beta)}$ *тогда и только тогда, когда* $2\operatorname{sgn}(\alpha+\varkappa)+\operatorname{sgn}(\beta+\mu)\geqslant 0$. *При этом условии $H$-преобразование изоморфно отображает пространство* $L_2^{(\alpha,\beta)}$ *на пространство* $L_2^{(\alpha+\varkappa,\,\beta+\mu)}$.

*Если, кроме того,* $2\operatorname{sgn}\varkappa+\operatorname{sgn}(\mu-1/2)>0$ *и выполняются условия*

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} a_i+\alpha_i/2>0,\ i=\overline{1,A};\ \operatorname{Re} b_i-\beta_i/2>0,\ i=\overline{1,B}; \\ &\operatorname{Re} c_i+\gamma_i/2>0,\ i=\overline{1,C};\ \operatorname{Re} d_i-\delta_i/2>0,\ i=\overline{1,D}, \end{aligned} \tag{13}$$

*то формула (1) может быть представлена в классическом виде:*

$$(Hf)(x)=\int_0^\infty H^{A,B}_{B+C,A+D}\left(xy\left|\begin{matrix}(1-b_B,\beta_B),\ (c_C,\gamma_C)\\ (a_A,\alpha_A),\ (1-d_D,\delta_D)\end{matrix}\right.\right)f(y)dy, \tag{14}$$

*где* $H^{m,n}_{p,q}\left(x\left|\begin{matrix}(a_p,\alpha_p)\\ (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right.\right)$—*H-функция Фокса* ([11]).

Определение 3. *Если* $H_1,\ldots,H_n$—такие *H-преобразования, что их образы ядер* $H_1(s),\ldots,H_n(s)$ *удовлетворяют условию*

$$H_1(s)H_2(s)\ldots H_n(s)=H(s), \tag{15}$$

*где* $H(s)$ *определяется по формуле* (2), *то будем говорить, что H-преобразование* (1) *факторизуется на преобразования* $H_1,\ldots,H_n$.

Пусть преобразования $H_1,\ldots,H_n$ имеют соответственно характеристические числа $(\varkappa_1,\mu_1),\ldots,(\varkappa_n,\mu_n)$ $\left(\varkappa=\sum_{l=1}^n\varkappa_l,\ \mu=\sum_{l=1}^n\mu_l\right)$.

Теорема 4. *Если* $2\operatorname{sgn}(\varkappa+\alpha)+\operatorname{sgn}(\mu+\beta)\geqslant 0$, *то H-преобразование* (1) *в* $L_2^{(\alpha,\beta)}$ *можно факторизовать через преобразования* $H_1,\ldots,H_n$, *расположенные в следующем порядке:*

$$(Hf)(x)=(H_{i_n}\ldots H_{i_2}H_{i_1})f=g(x), \tag{16}$$

*тогда и только тогда, когда* $(i_1,\ldots,i_n)$—*такая подстановка чисел* $(1,2,\ldots,n)$, *что*

$$2\operatorname{sgn}\left(\alpha+\sum_{k=1}^j\varkappa_{i_k}\right)+\operatorname{sgn}\left(\beta+\sum_{k=1}^j\mu_{i_k}\right)\geqslant 0,\quad j=\overline{1,n}, \tag{17}$$

*причем для* $H_1,\ldots,H_n$ *всегда существует по крайней мере одна подстановка, удовлетворяющая условию* (17). *При указанных условиях обратный к* (16) *оператор* $(H^{-1}g)(x)$ *факторизуется следующим образом:*

$$(H^{-1}g)(x)=(H_{i_1}^{-1}\ldots H_{i_n}^{-1})g. \tag{18}$$

Замечание. *Если (17) имеет место для всех подстановок, что справедливо, например, в случае*

$$2\operatorname{sgn}\left(\alpha-\sum_{l=1}^n|\varkappa_l|\right)+\operatorname{sgn}\left(\beta-\sum_{l=1}^n|\mu_l|\right)\geqslant 0, \tag{19}$$

*то порядок действий операторов в (16) может быть произвольным.*

Очевидно, что все обратные к *H*-преобразованиям также являются *H*-преобразованиями, поэтому в теоремах 3,4 величины $2\operatorname{sgn}\varkappa+\operatorname{sgn}\mu$ и $2\operatorname{sgn}\varkappa_l+\operatorname{sgn}\mu_l$ для операторов $H$ и $H_l$ могут иметь произвольные знаки или обращаются в нуль.

Пример. Пусть $L\{\varphi(t);x\}$ и $L^{-1}\{\varphi(t);x\}$—прямое и обратное преобразования Лапласа функции $\varphi(t)$ в точке $x$ ([5,6]). Образы ядер преобразований $x^{a/\alpha}L\{t^{a+\alpha-1}f(t^{\alpha});x^{1/\alpha}\}$, $x^{(1-a-\alpha)/\alpha}L^{-1}\{t^{-a}f(t^{\alpha});x^{1/\alpha}\}$, $\mathrm{Re}\,a+\alpha/2>0$, $\alpha\in R$, очевидно равны $\Gamma(a+\alpha s)$, $1/\Gamma(a+\alpha s)$, поэтому по определению 3 $H$-преобразование (1) при условиях (13) факторизуется на композицию преобразований Лапласа вида

$$x^{a_i/\alpha_i}L\{t^{a_i+\alpha_i-1}f(t^{\alpha_i});x^{1/\alpha_i}\},\quad i=\overline{1,A},\tag{20}$$

$$x^{-b_i/\beta_i}L\{t^{b_i-\beta_i-1}f(t^{-\beta_i});x^{-1/\beta_i}\},\quad i=\overline{1,B},$$

$$x^{(1-c_i-\gamma_i)/\gamma_i}L^{-1}\{t^{-c_i}f(t^{\gamma_i});x^{1/\gamma_i}\},\quad i=\overline{1,C},$$

$$x^{(d_i-\delta_i-1)/\delta_i}L^{-1}\{t^{-d_i}f(t^{-\delta_i});x^{-1/\delta_i}\},\quad i=\overline{1,D}.$$

Замечание. *Если условия* (13) *не выполняются, то вместо* (20) *нужно взять операторы, порожденные равенством* (15) *из* ([1]).

В заключение отметим, что в качестве $H_i$ можно брать также преобразования Ханкеля, Римана—Лиувилля, Вейля, Стилтьеса, Мейера, ... и им обратные ([1]).

Белорусский государственный
университет им. В. И. Ленина

ՎՈՒ ԿԻՄ ՏՈՒԱՆ

## Փաքույթի տիպի ինտեգրալ ձևափոխությունների ֆակտորիզացիայի մասին $L_2^{\Phi}$ տարածություններում

*([1]) աշխատանքում ցույց է տրված, որ փաթույթի տիպի կամայական դասական ինտեգրալ ձևափոխություն ֆակտորիզացվում է ավելի պարզ ինտեգրալ ձևափոխությունների կոմպոզիցիայի միջոցով և որպես ձևափոխության բաղադրիչներ կարելի է վերցնել Լապլասի մոդիֆիկացված օպերատորները, իսկ կոմպոզիցիայի կարգը կախված է օրիգինալ ֆունկցիայի հատկություններից և բաղադրիչ օպերատորների տեսքից։*

*Այս աշխատանքում այդպիսի կախվածությունը և ֆակտորիզացիայի հնարավորությունը ուսումնասիրվում է $L_2^{\Phi}$ տարածությունում ([2,4])։ Աշխատանքում սահմանված բնութագրիչ տարածության հատկության և ձևափոխությունների օգնությամբ հաջողվում է նկարագրել պատկեր ֆունկցիաների տարածությունը, ինչպես նաև $L_2^{\Phi}$-ում որոշ ֆակտորիզացիայի իրավացիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները։*

### ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. А. Брычков, Х. -Ю. Глеске, О. И. Маричев,* Итоги науки и техники ВИНИТИ, мат. анализ, т. 21 (1983). [2] *В. А. Диткин, А. П. Прудников,* Итоги науки ВИНИТИ, мат. анализ, т. I (1966). [3] *С. А. Акопян,* Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, т. 13, № 1 (1960). [4] *М. М. Джрбашян,* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Наука, М., 1966. [5] *Е. Титчмарш,* Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.-Л., 1948. [6] *В. А. Диткин, А. П. Прудников,* Интегральные преобразования и операционное исчисление, Наука, М., 1974. [7] *О. И. Маричев,* Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул), Наука и техника, Минск, 1978. [8] *R. Narain,* Proc. Amer. Math. Soc., v. 14, № 2 (1963). [9] *G. N. Watson,* Proc. London Math. Soc. (2), v. 35 (1933). [10] *И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер,* Преобразование типа свертки, ИЛ, М., 1958. [11] *C. Fox,* Trans. Amer. Math. Soc., v. 98, № 3 (1961).