ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 1

УДК 512.86

МАТЕМАТИКА

А. Д. Туниев, А. С. Туниев

Об одном методе обращения прямоугольных матриц и его применении

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 20/XII 1984)

В данной работе предлагаются метод обращения прямоугольных матриц и его применение в линейном программировании. В основу этой работы положены теоретические положения, изложенные в [1,2]. Предлагаемые методы отличаются от приведенных в [1,2] тем, что здесь рассматривается случай, когда $K_i \cap K_j \neq \varnothing$, $i \neq j$. Приведем необходимые обозначения из [3]. Вектор $x = \{x_i\}$, где i пробегает множество N, обозначим $x[N]$. Если $K \subset N$, то соответствующий „кусок" вектора обозначим $x[K]$. Символ $a\,[M, N] = \{a_{ij}\}$ обозначает матрицу, индексы строк и столбцов которой пробегают множество M и N.

1°. *Описание метода.* Рассмотрим линейную алгебраическую систему

$$a[M, N]x[N] = a[M, 0], \tag{1}$$

где $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть ранг $a[M, N]$ равен r и первые ее r строк линейно-независимы. Обозначим $R = \{1, 2, \ldots, r\}$ $N' = \{0, 1, \ldots, n\}$ и положим $a^0[M, N'] = a[M, N']$. Сущность метода заключается в следующем.

1. Последовательно для $s = 1, 2, \ldots, r$ выбираем $K_s \subseteq N$ такое что $\|a^{s-1}[s, K_s]\| \neq 0$, и полагаем

$$a^s[i, N'] = \begin{cases} \dfrac{a^{s-1}[i, N']}{\|a^{s-1}[i, K_i]\|}, & \text{при } i = s, \\ a^{s-1}[i, N'] + \alpha_i^s a^s[s, N'], & \text{при } i \in M \setminus s, \end{cases}$$

где
$$\alpha_i^s = \alpha_i^s(K_s) = -a^{s-1}[i, K_s]a^s[s, K_s], \quad i \in M \setminus s.$$

2. Через r шагов получим эквивалентную систему $a^r[R, N]x[N] = a^r[R, 0]$.

3. Пусть $K = \bigcup\limits_{s \in R} K_s$. Строим матрицу $b[R, K] = \{b[s, j]\}$, где

$$b[s, j] = \begin{cases} a^s[s, j], & j \in K_s, \\ 0 & j \in K \setminus K_s \ (s \in R). \end{cases} \tag{2}$$

4. Пусть $x^0[K, N'] = b[R, K]^T a^r[R, N']$. Формируем систему $x^0[K, N]x[N] = x^0[K, 0]$.

Теорема 1. *При введенных предположениях справедливы утверждения:*

а) $x^0[K, K]x^0[K, j]=x^0[K, j]$, $j\in N'$;

б) $x^0[K, j]$ *ортогонален ядру матрицы* $b[R, K]$, $j\in N$;

в) $a[M, K]x^0[K, j]=a[M, j]$, $j\in N'$,

при этом подобное разложение в рассматриваемом смысле (при $\{K_1, K_2, \ldots, K_r\}$*) является единственным.*

Доказательство теоремы 1 проводится по схеме теоремы 2 из ([1]).

Следствие. Если $x^0[K, 0]$ и $x'[K', 0]$—решения (особые) системы (1) соответственно при $\{K_1, K_2, \ldots, K_r\}$ и $\{K'_1, K'_2, \ldots, K'_r\}$, где $K_s\subseteq K'_s$, $s\in R$; $K'=\bigcup_{s\in R} K'_s$, то $\|x^0[K, 0]\|\geqslant\|x'[K', 0]\|$.

Замечание 1. Если в описанном методе на каждом s-ом шаге преобразуются только элементы, стоящие ниже s-ой ($s=1, 2, \ldots, s$) строки, то для нахождения решения системы (1), согласно формуле (4) из ([1]), организуется обратный ход.

2°. *Об одном классе полуобратных матриц.* Пусть $b[N, N]=a[M, N]^T a[M, N]$. Рассмотрим нормальное матричное уравнение

$$b[N, N]x[N, M]=a[M, N]^T. \tag{3}$$

Пусть $K=N=\bigcup_{s\in R} K_s$, где $K_s\subseteq N$, $s\in R$. При $\{K_1, K_2, \ldots, K_r\}$ применим к системе (3) описанный выше метод. Тогда после r шагов получим эквивалентную систему вида $p[N, N]x[N, M]=\tilde{a}[N, M]$, где $\tilde{a}[N, M]$—особое решение (3).

Теорема 2. *Полуобратная матрица* $\tilde{a}[N, M]$ *обладает первыми тремя свойствами частично-псевдообратной матрицы ([1]) и в рассматриваемом смысле единственная.*

3°. *Линейное программирование.* Рассмотрим задачу линейного программирования: максимизировать линейную форму

$$c[N]x[N] \tag{4}$$

при

$$a[M, N]x[N]=a[M, 0], \; x[N]\geqslant 0[N]. \tag{5}$$

3°. 1. Признаки оптимальности особого плана. Пусть $K\subseteq N$ и $\tilde{a}[K, M]$ полуобратная матрица относительно матрицы $a[M, K]$. Тогда: а) расширенные оценки $x^0[0, j]=c[K]\tilde{a}[K, M]a[M, j]-c[j]=\tilde{a}[K, M]^T c[K]^T a[M, j]-c[j]$, $j\in N'$; б) если $x^0[0, j]\geqslant 0$, $j\in N'$ и $x[K]=\tilde{a}[K, M]a[M, 0]\geqslant 0[K]$, то из критерия оптимальности Л. В. Канторовича ([4]) следует, что $x[K]$—решение задачи (4), (5), а $\lambda[M]=\tilde{a}[K, M]^T c[K]^T$—решение сопряженной к ней задачи.

3°.2. *Модификация расширенного симплекс-метода* ([2]). Пусть задача (4), (5) не вырожденная, $x^0[M, N']=a[M, N']$, $x^0[M, M]$—единичная матрица, $x^0[M, 0]$—опорный план и $x^0[0, j]$, $j\in N'$—оценки (при $j=0$, $c[j]=c$). Опишем переход от s-го шага к $s+1$, где $s=0, 1, 2, \ldots, s$. Пусть после $s\geqslant 1$ шагов получена система $x^s[M, N]x[N]=x^s[M, 0]$, оценки $x^s[0, j]$, $j\in N'$, и система векторов $\{b[i, K_i]\}_{i\in S_d}$, где $S_d=\{1, 2, \ldots, d\}$, $d\leqslant m$ (при $s=0$ $S_d=\varnothing$), *Описание метода.* 1. Пусть $x_s[0, j]<0$, $j \in \overline{K}_{s+1}$, где $\overline{K}_{s+1} \subseteq N^*$.

2. Пусть $x^s[i, 0]>0$, $i \in M^{**}$. Определяем

$$\theta_f = \frac{x^s[f, 0]}{\|x^s[f, \overline{K}_f]\|} = \min_i \frac{x^s[i, 0]}{\|x^s[i, \overline{K}_i]\|}$$

для тех i, для которых вектор $x^s[i, \overline{K}_i]$ содержит *все* положительные компоненты вектора $x^s[i, \overline{K}_{s+1}]$. Ясно, что $\overline{K}_i \subseteq \overline{K}_{s+1}$.

3. Шаг обобщенного жорданового исключения. Полагаем

$$x^{s+1}[i, N'] = \begin{cases} \dfrac{x^s[i, N']}{\|x^s[i, \widetilde{K}_i]\|}, & \text{при } i=f, \\ x^s[i, N'] + \alpha_i^{s+1} x^{s+1}[f, N'], & \text{при } i \neq f, \end{cases}$$

где $\alpha_i^{s+1} = \alpha_i^{s+1}(\overline{K}_f) = -x^s[i, \widetilde{K}_f] x^{s+1}[f, \widetilde{K}_f]$, $i \neq f$.

4. Если $f \in S_d$, то полагаем $\widetilde{b}[f, K_f] = x^{s+1}[f, \overline{K}_f]$, $\widetilde{b}[i, K_i] = b[i, K_i]$, $i \in S_d \setminus f$.

Если $f \overline{\in} S_d$, то полагаем $\widetilde{b}[f, K_f] = x^{s+1}[f, \overline{K}_f]$, $\widetilde{b}[i, K_i] = b[i, K_i]$, $i \in S_d$ $(f+d \leqslant m)$. (6)

5. Если оценки $x^{s+1}[0, j] \geqslant 0$, $j \in N$, то переходим к п. 6, в противном случае переходим к п. 1, где полагаем $s = s+1$.

6. Пусть $f \in S_d$. Полагаем $K = \bigcup_{i \in S_d} K_i$ и строим матрицу $\overline{b}[S_d, K] = \{\overline{b}[i, j]\}$, где

$$\overline{b}[i, j] = \begin{cases} \widetilde{b}[i, j], & \text{при } j \in K_i, \\ 0, & \text{при } j \in K / K_i \ (i \in S_d). \end{cases}$$

Тогда $\{x[K] = \overline{b}[S_d, K]^T x^{s+1}[S_d, 0],\ x[M \setminus S_d] = x^{s+1}[M \setminus S_d, 0]\}$ — особое решение задачи (4), (5).

Если $f \overline{\in} S_d$, то в пункте 6, с учетом (6), полагаем $K = K \cup K_f$, $S_d = S_d \cup f$.

Доказательство конечности метода проводится по схеме теоремы 2 из ([2]).

Замечание 2. Предлагаемый метод с учетом 3°.1 может лечь в основу для пересмотра метода обратной матрицы и двойственного симплекс-метода.

4°. *О дальнейшем развитии LU-разложения****. Используя параметрическое линейное преобразование ([1]), можно показать, что если $a[M, N]$ матрица полного ранга, то при некоторых естественных предположениях и выборе $\{K_1, K_2, \ldots, K_m\}$

$$a[M, N] = L_K[M, M] U_K[M, N], \text{ где } K = N = \bigcup_{i=1}^{m} K_i \tag{7}$$

при этом данное разложение в рассматриваемом смысле единственное. Здесь $L_K[M, M]$ нижняя треугольная матрица, диагональные

---

* Если для некоторого i, $x^s[i, j] < 0$ и $x^s[0, j] < 0$, то задача (4), (5) неразрешима

** Если для некоторых i, $x^s[i, 0] = 0$, то определяем коэффициенты разложения по псевдобазису и, как в расширенном симплекс-методе, исключаем нулевые компоненты плана.

*** Результаты, изложенные в п. 4°, сформулированы и доказаны А. Д. Туниевым.

элементы которой равны единице, а „куски" строк $u_K[M, N]$ удовлетворяют условию: $u_K[i, K_i]u[j, K_i]=0$, $i<j$ ($i=1, 2, \ldots, m-1$; $j=2, 3, \ldots, m$).

Разложение (7) можно представить в виде произведения элементарных матриц (подобно тому, как это делается для LU-разложения). Последнее позволяет оценить ошибки округления методов, основанных на данном разложении. В частности, на основании (7) был обобщен метод Краута и с учетом соображения из ([5]) показано, что если в обобщенном методе Краута используется режим накопления скалярного произведения, то точность полученного результата определяется $\beta=\beta(K)$, которая характеризует рост элементов.

НПО Министерства местной промышленности
Армянской ССР
ЕрНИПИ АСУГ

Ա. Դ. ԹՈՒՆԻԵՎ, Ա. Ս. ԹՈՒՆԻԵՎ

Ուղղանկյան մատրիցների հակադարձելիության մի մեթոդի և նրա կիրառությունների մասին

Աշխատանքում առաջարկվում է ոչ թե մեկ, այլ մի քանի էլեմենտների (ուղղորդ-վեկտորի) ընտրությամբ պայմանավորված ուղղանկյան մատրիցների հակադարձման մեթոդ։

Առաջարկվող մեթոդը հիմք է հանդիսանում Մուր-Պենրոուզի հայտնի մատրիցայի ընդհանրացման համար։ Ցույց է տրված ստացված արդյունքների կիրառությունը գծային ծրագրավորման մեջ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Д. Туниев*, Кибернетика, № 3, 1983. [2] *А. Д. Туниев*, Кибернетика, № 4, 1984. [3] *И. В. Романовский*, Алгоритмы решения экстремальных задач, Наука, М., 1977. [4] *Л. В. Канторович*, ДАН СССР, т. 37, № 7—8 (1942). [5] *В. В. Воеводин*, Вычислительные основы линейной алгебры, М., Физматгиз, 1961.