

УДК 539.3

МЕХАНИКА

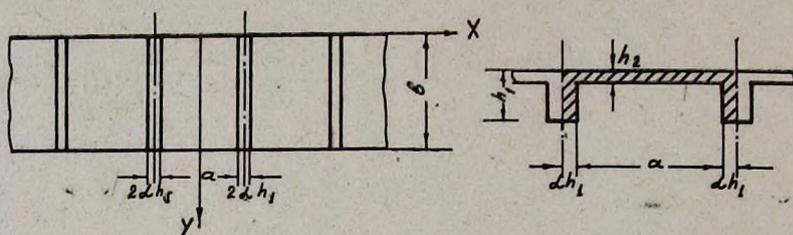
Э. В. Белубекян, А. З. Дарбинян

**Оптимальное ребрирование длинной пластинки, изготовленной из композиционного материала**

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 3/XII 1985)

Пусть длинная прямоугольная пластинка ширины  $b$  подкреплена равноудаленными ребрами жесткости, шарнирно закреплена вдоль кромок  $y=0$  и  $y=b$  и подвергается поперечному давлению  $q=q(y)$  (рисунки). Предполагается, что конструкция изготовлена из монослоев ВКМ, поочередно уложенных под углом  $\pm\varphi$  к оси  $x$  в пластинках между ребрами и вдоль оси  $y$  в ребрах.

Ставится задача определения значений  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $a$ ,  $a$ ,  $\varphi$  из условия



наибольшей несущей способности конструкции при сохранении ее веса и ограничений на прочность. Условие

$$a = \frac{2ah_1(h_1 - h_0)}{h_0 - h_2}, \quad (1)$$

где  $h_0$  — толщина сплошной длинной пластинки заданного веса, обеспечивает постоянство веса конструкции.

Ввиду равноудаленности ребер рассматривается задача прочности ортотропной пластинки размерами  $a \times b$ , опертая вдоль кромок  $x = \pm a/2$  на упругие балки.

Функция  $w$  прогиба пластинки должна удовлетворять уравнению

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (2)$$

и граничным условиям

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = b,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ah_1 q = E_1 J \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{при } x = \frac{a}{2},$$

где  $D_{ik} = \frac{B_{ik} h^3}{12}$ ,  $D_3 = D_{12} + 2D_{66}$ ,  $J = ah_1^3/12$  — момент инерции половины по ширине ребра жесткости,  $E_1$  — модуль упругости ВКМ вдоль волокон,  $B_{ik}$  — упругие характеристики монослоев ВКМ по оси  $x$ , определяемые через их упругие характеристики  $B_{ik}^0$  по направлению волокон по известным формулам поворота (1).

Разлагая функцию нагрузки в ряд Фурье

$$q(y) = \sum_1^{\infty} a_k \sin \lambda_k y, \quad a_k = \frac{2}{b} \int_0^b q(y) \sin \lambda_k y dy, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{b},$$

находим решение уравнения (2) с удовлетворением условий (3) для трех возможных случаев:  $D = D_3^2 - D_{11} D_{22} > 0$ ,  $D < 0$ ,  $D = 0$ .

Для сокращения записи здесь приводится решение только для случая  $D < 0$ :

$$w = \sum_1^{\infty} \left[ \frac{a_k}{D_{22} \lambda_k^2} + A_k \operatorname{sh} \beta_1 \lambda_k x \sin \beta_2 \lambda_k x + B_k \operatorname{ch} \beta_1 \lambda_k x \cos \beta_2 \lambda_k x \right] \sin \lambda_k y, \quad (4)$$

$$\text{где} \quad \beta_{1,2} = \sqrt{\frac{\gamma D_{11} D_{22} \pm D_3}{2D_{11}}},$$

$$A_k = -\frac{2a_k}{C_k D_{11} \lambda_k^2} \left( \frac{E_1 J}{D_{22}} - ah_1 \right) \left( \beta_2 \operatorname{ch} \beta_1 \frac{\lambda_k a}{2} \sin \beta_2 \frac{\lambda_k a}{2} - \beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \frac{\lambda_k a}{2} \cos \beta_2 \frac{\lambda_k a}{2} \right),$$

$$B_k = -\frac{2a_k}{C_k D_{11} \lambda_k^2} \left( \frac{E_1 J}{D_{22}} - ah_1 \right) \left( \beta_1 \operatorname{ch} \beta_1 \frac{\lambda_k a}{2} \sin \beta_2 \frac{\lambda_k a}{2} + \beta_2 \operatorname{sh} \beta_1 \frac{\lambda_k a}{2} \cos \beta_2 \frac{\lambda_k a}{2} \right),$$

$$C_k = 4\beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) \left( \operatorname{sh}^2 \beta_1 \frac{\lambda_k a}{2} + \sin^2 \beta_2 \frac{\lambda_k a}{2} \right) + \frac{E_1 J}{D_{11}} \lambda_k (\beta_1 \sin \beta_2 \lambda_k a + \beta_2 \operatorname{sh} \beta_1 \lambda_k a).$$

Условия прочности принимаются в виде:

$$\sigma_{\text{умax}} \leq \sigma_{B1} \quad \text{для ребра}, \quad (5)$$

$$\left( \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{B1}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{B2}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}}{\tau_{B0}} \right)^2 - \frac{\sigma_{11} \sigma_{22}}{\sigma_{B1}^2} \leq 1 \quad (6)$$

для наиболее опасных точек пластинки.

Здесь  $\sigma_{B1}$ ,  $\sigma_{B2}$ ,  $\tau_{B0}$  — прочностные характеристики ВКМ,  $\sigma_{\text{умax}}$  — наибольшее напряжение в ребре, определяемое по формуле

$$\sigma_{\text{умax}} = -E_1 \frac{h_1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{при } x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad (7)$$

$\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  — напряжения в наиболее опасных точках пластинки ( $x=0$ ,  $y=b/2$ ,  $z=h_2/2$  и  $x=a/2$ ,  $y=b/2$ ,  $z=h_2/2$ ) по направлениям укладки монослоев ВКМ:

$$\sigma_{11} = B_{11}^0 e_{11} + B_{12}^0 e_{22}, \quad \sigma_{22} = B_{12}^0 e_{11} + B_{22}^0 e_{22}, \quad \sigma_{12} = B_{66}^0 e_{12}, \quad (8)$$

$e_{11}$ ,  $e_{22}$ ,  $e_{12}$  — деформации по направлениям укладки монослоев ВКМ, которые по формулам:

$$e_{11} = e_x \cos^2 \varphi + e_y \sin^2 \varphi - e_{xy} \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$e_{22} = e_x \sin^2 \varphi + e_y \cos^2 \varphi + e_{xy} \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$e_{12} = (e_x - e_y) \sin 2\varphi + e_{xy} \cos 2\varphi$$

выражаются через деформации по направлениям осей  $x$  и  $y$ :

$$e_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad e_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad e_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

при  $x=0, y=b/2, z=h_2/2; x=a/2, y=b/2, z=h_2/2$ .

При заданном распределении нагрузки  $q(y)$  по формулам (7) и (8) вычисляются напряжения в наиболее опасных точках ребра и пластинки и затем из условий прочности (5) и (6) определяются соответствующие значения параметра нагрузки  $q_{01}, q_{02}, q_{03}$ . Допускаемая несущая способность будет

$$q_0 = \min\{q_{01}, q_{02}, q_{03}\}. \quad (10)$$

При заданном весе конструкции ( $h_0$ ), а также значении  $\alpha=0,1$ , что соответствует согласно теории расчета балок предельному значению отношения ширины ребра к высоте (1/5), параметр  $q_0$  определяется значениями высоты ребра  $h_1$ , толщины пластинки  $h_2$  и углом укладки монослоев ВКМ— $\varphi$ , оптимальным выбором которых следует добиться максимального значения  $q_0$ .

Поставленная задача сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

$$\text{найти} \quad Q = \max_{\bar{x}} \bar{q}_0, \quad \bar{x} = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2, \varphi\} \quad (11)$$

$$\text{при ограничениях} \quad \bar{h}_0 \leq \bar{h}_1 \leq 0,2; \quad \delta \leq \bar{h}_2 \leq \bar{h}_0; \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad \bar{a} \geq 5\bar{h}_2. \quad (12)$$

Здесь  $\bar{q}_0 = q_0/\sigma_{в1}$  — целевая функция,  $q_0$  определяется из (10),  $\bar{x}$  — вектор управления,  $\bar{h}_1 = h_1/b, \bar{h}_2 = h_2/b, \bar{a} = a/b, \bar{h}_0 = h_0/b$  — геометрические параметры конструкции.

Ограничения (12) обусловлены пределами применимости классической теории балок и пластин. Значения параметра  $\delta$  принимаются:  $\delta=0,01$  при  $a \geq b$  и  $\delta=0,01\bar{a}$  при  $a < b$ .

Задача решается при помощи комплексного метода случайного поиска, разработанного Боксом (2). Численная реализация проведена для пластинки, изготовленной из СВМ 5:1.

Полученные значения оптимальных параметров  $\varphi, \bar{h}_1, \bar{h}_2$ , соответствующее межреберное расстояние  $\bar{a}$  и соответствующая максимальная несущая способность  $Q$  для различных весовых характеристик  $\bar{h}_0$  приведены в таблице. Там же для сравнения даны значения наибольшей несущей способности  $Q_0$  для соответствующих сплошных пластинок ( $\varphi=90^\circ$ ).

Расчеты показывают, что оптимальный проект соответствует равенству значений нагрузок, определяемых в опасных точках  $q_{01} = q_{02} = q_{03}$ , что соответствует равнопрочной конструкции.

$\bar{h}_0$	$\varphi^0$	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	$\bar{a}$	$Q$	$Q_0$
0,05	88	0,193	0,0178	0,171	0,00915	0,00339
0,04	86	0,168	0,0146	0,170	0,00625	0,00216
0,03	86	0,144	0,0113	0,163	0,00382	0,00122
0,02	87	0,111	0,00798	0,167	0,00191	0,000542
0,01	88	0,073	0,00437	0,165	0,000586	0,000135

Сравнение результатов несущей способности для ребристой и сплошной пластин одинакового веса показывает, что оптимальное ребрирование приводит к существенному увеличению несущей способности. Причем этот эффект тем больше, чем меньше значение  $\bar{h}_0$ . При  $\bar{h}_0 = 0,01$  можно достичь увеличения несущей способности в 4,34 раза.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

**Է. Վ. ԲԵՆՈՒԲԵԿՅԱՆ, Ա. Զ. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ**

**Կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված երկար սալի օպտիմալ կաղավորումը**

Դիտարկվում է նորմալ բեռի ազդեցության տակ գտնվող, կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված և կոշտության կողերով ուժեղացված երկար ուղղանկյան սալի օպտիմալ նախագծման խնդիրը:

Հաշվի առնելով կողերի և նրանց մեջ գտնվող սալերի ամրության վրա դրված սահմանափակումները, որոշվում են կոնստրուկցիայի երկրաչափական և ֆիզիկական պարամետրերը, որոնք ապահովում են նրա մաքսիմալ կրողունակությունը տրված կշռի դեպքում:

**ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ**

<sup>1</sup> С. А. Амбарцумян, Теория анизотропных пластин, Наука, М., 1967. <sup>2</sup> Д. Химмельблау, Прикладное нелинейное программирование, Мир, М., 1975.