ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1986 5

УДК 536.24

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

# О смешанной граничной задаче теплопроводности для цилиндра конечной длины

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 12/VII 1985)

В работе приводится решение смешанной краевой задачи стационарного осесимметричного распределения температуры в круглом цилиндре конечной длины $d$, на поверхности которого происходит теплообмен с окружающей средой, когда коэффициент теплообмена произвольным образом изменяется по длине цилиндра. Предполагаем, что внутри цилиндра имеются источники тепла с изменяющейся по радиусу и по длине цилиндра интенсивностью. В этом случае температура $U(r, x)$ цилиндра удовлетворяет дифференциальному уравнению [1,2]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=-\frac{1}{\lambda}w(r, x) \tag{1}$$

и граничным условиям

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=R}=h(x)[S(x)-U(R, x)];\quad -\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=h_0[T_0(r)-U(r, 0)];$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=d}=h_1[T_1(r)-U(r, d)]. \tag{2}$$

Здесь $\lambda$—коэффициент теплопроводности, $w$—интенсивность тепловыделения, $h_j$, $S$, $T_j$—соответственно коэффициенты теплообмена и температура окружающей среды. Относительно функций $h(x)$, $S(x)$, $T_0(r)$, $T_1(r)$ и $w(r, x)$ предполагаем, что они имеют ограниченную вариацию в соответствующих областях. Исходя из физического смысла, предполагаем, что $h_j$ неотрицательны. Представим функцию $U(r, x)$ в виде ряда

$$U(r, x)=\sum_{k=0}^{\infty}U_k(r)\eta_k(x), \tag{3}$$

где $U_k(r)=\int\limits_0^d U(r, x)\eta_k(x)dx$, а $\eta_k(x)$ являются собственными функциями краевой задачи

$$\eta''(x)+\gamma^2\eta(x)=0;\quad -\eta'(0)+h_0\eta(0)=\eta'(d)+h_1\eta(d)=0 \tag{4}$$

и имеют вид

$$\eta_k(x)=\mu_k\left(\cos\gamma_k x+\frac{h_0}{\gamma_k}\sin\gamma_k x\right);\quad \mu_k=\sqrt{\frac{2}{d}}\left[1+\frac{h_0^2}{\gamma_k^2}+\frac{(h_0+h_1)(\gamma_k^2+h_0h_1)}{\gamma_k^2(\gamma_k^2+h_1^2)d}\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

причем собственные значения $\gamma_k$ являются положительными корнями трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}\gamma_k d=\frac{\gamma_k(h_0+h_1)}{\gamma_k^2-h_0h_1}. \tag{6}$$

Уравнения типа (6) рассматривались различными авторами, давшими асимптотические выражения их корней [3], а также определившими величины первых корней для различных значений $h_0$ и $h_1$ [4]. Двусторонние оценки корней уравнения (6), сближающиеся при возрастании $k$ с быстротой $O\left(\frac{1}{k^3}\right)$, даны в [5]. Как известно [3], система функций $\{\eta_k(x)\}$ ортонормирована и полна в $(0, d)$. Умножив уравнение (1) на $\eta_k(x)dx$ и проинтегрировав от 0 до $d$, получим

$$U_k''(r)+\frac{1}{r}U_k'(r)-\gamma_k^2U_k(r)=-\frac{1}{\lambda}\int_0^d w(r, x)\eta_k(x)dx-$$

$$-h_0\eta_k(0)T_0(r)-h_1\eta_k(d)T_1(r)=-w_k(r). \tag{7}$$

Решая уравнение (7) и учитывая ограниченность решения при $r=0$, будем иметь

$$U_k(r, x)=\frac{1}{I_0(\gamma_k R)}\Big\{I_0(\gamma_k r)\Big[M_k+\int_r^R r_1w_k(r_1)(I_0(\gamma_k R)K_0(\gamma_k r_1)-K_0(\gamma_k R)\times$$

$$\times I_0(\gamma_k r_1))dr_1\Big]+[I_0(\gamma_k R)\,K_0(\gamma_k r)-K_0(\gamma_k R)I_0(\gamma_k r)]\int_0^r r_1w_k(r_1)I_0(\gamma_k r_1)dr_1\Big]\Big\}, \tag{8}$$

где $I_n(r)$, $K_n(r)$—видоизмененные функции Бесселя первого и второго рода $n$-го порядка. Для определения постоянных $M_k$, входящих в (8), умножив первое из граничных условий (2) на $\eta_k(x)dx$ и проинтегрировав от 0 до $d$, получим

$$m_k=\frac{(\gamma_k d)^{3/2}I_0(\gamma_k R)}{\gamma_k I_1(\gamma_k R)+I_0(\gamma_k R)\int_0^d h(x)\eta_k^2(x)dx}\Big[\int_0^d h(x)S(x)\eta_k(x)dx+\frac{1}{RI_0(\gamma_k R)}\times$$

$$\times\int_0^R rw_k(r)I_0(\gamma_k r)dr-m_0\int_0^d h(x)\eta_0(x)\eta_k(x)dx-\sum_{j=1}^{\infty}{}'\frac{m_j}{(\gamma_j d)^{\frac{3}{2}}}\int_0^d h(x)\eta_j(x)\eta_k(x)dx\Big]; \tag{9}$$

$$m_0=\frac{I_0(\gamma_0 R)}{\gamma_0 I_1(\gamma_0 R)+I_0(\gamma_0 R)\int_0^d h(x)\eta_0^2(x)dx}\Big[\int_0^d h(x)S(x)\eta_0(x)dx+$$

$$+\frac{1}{RI_0(\gamma_0 R)}\int_0^R r w_0(r) I_0(\gamma_0 r)\,dr-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{m_j}{(\gamma_j d)^{3/2}}\int_0^d h(x)\eta_j(x)\eta_0(x)\,dx\Bigg],$$

где

$$m_k=(\gamma_k d)^{3/2}M_k;\quad m_0=M_0, \tag{10}$$

а штрих при знаке суммы означает, что при суммировании индекс $j=k$ опускается. Таким образом, для определения новых постоянных $m_k$ получили бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (9). Для исследования этой системы оценим вначале сумму модулей коэффициентов при неизвестных $m_j$ в каждом из уравнений (9). Обозначив через $\sigma_k$ сумму модулей коэффициентов в $k$-том уравнении первой из систем и воспользовавшись оценкой коэффициентов Фурье функций с ограниченной вариацией [6], будем иметь для $k>0$

$$\sigma_k<\frac{H\gamma_k^{\frac{3}{2}}I_0(\gamma_k R)\mu_k\sqrt{d}}{2\left[\gamma_k I_1(\gamma_k R)+I_0(\gamma_k R)\int_0^d h(x)\eta_k^2(x)\,dx\right.}\left\{\mu_0\left[\left(1+\frac{h_0^2}{\gamma_0\gamma_k}\right)\frac{1}{\gamma_k-\gamma_0}+\right.\right.$$

$$\left.+\left|1-\frac{h_0^2}{\gamma_0\gamma_k}\right|\frac{1}{\gamma_k+\gamma_0}+\frac{2h_0}{\gamma_0\gamma_k}\right]+\sum_{j=1}^{\infty}{}'\frac{\mu_j}{(\gamma_j d)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1+\frac{h_0^2}{\gamma_j\gamma_k}\right)\frac{1}{|\gamma_j-\gamma_k|}+\right.$$

$$\left.\left.+\left|1-\frac{h_0^2}{\gamma_j\gamma_k}\right|\frac{1}{\gamma_j+\gamma_k}+\frac{2h_0}{\gamma_j\gamma_k}\right]\right\}. \tag{10}$$

Здесь через $H$ обозначена полная вариация функции $h(x)$ в интервале $(0, d)$. Учитывая, далее, двусторонние оценки $\gamma_k$ [5], после различных упрощений получим

$$\sigma_k<H\left(1+\frac{2}{\gamma_k R}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{k}}+\frac{0{,}3\ln k}{k}\right)<H\left(1+\frac{2d}{k\pi R}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{k}}+\frac{0{,}3\ln k}{k}\right). \tag{12}$$

Таким образом, суммы модулей коэффициентов при неизвестных $m_j$ в уравнениях (9) с возрастанием $k$ стремятся к нулю с быстротой $O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$, причем если $H<\frac{1}{4}\left(1+\frac{2d}{\pi R}\right)^{-1}$, то $\sigma_k<1$ для всех $k$. Свободные члены системы согласно предположению об ограниченности вариации функций $h(x)$, $S(x)$, $T_0(r)$, $T_1(r)$ и $w(r, x)$ с возрастанием $k$ также стремятся к нулю с быстротой $O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Согласно теории бесконечных систем [7] имеют место ограниченность решения системы (9) и сходимость метода последовательных приближений. Задаваясь значениями $h_0$, $h_1$, $h(x)$, $T_0(r)$, $T(r)$, $S(x)$, $\lambda$, $w(r, x)$ и решая усеченную систему (9), найдем оценки величин $m_k$ сверху и снизу, после чего способом, описанным в [8], получим из (3), (8) и (10) значения $U(r, x)$ с избытком и недостатком. Заметим, что при конкретном задании упомянутых величин преобразованием систем (9) можно значительно усилить быстроту убывания постоянных, определяемых из бесконечной системы [9], что позволяет существенно уменьшить число операций, необходимых для получения заданной точности решения.

Институт математики
Академии наук
Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

## Վերջավոր երկարությամբ գլանի համար ջերմահաղորդականության խառը եզրային խնդրի մասին

*Հոդվածում դիտարկվում է վերջավոր երկարություն ունեցող կլոր գլանում ջերմության կայունացած առանցքասիմետրիկ բաշխման խառը եզրային խնդիրը՝ գլանի արտաքին մակերևույթը շրջապատող միջավայրի հետ ջերմափոխանակության առկայության դեպքում, երբ ջերմափոխանակության գործակիցը կամայական ձևով փոփոխվում է ըստ գլանի երկարության։ Ենթադրվում է նաև, որ գլանի ներսը գոյություն ունեն ջերմության աղբյուրներ՝ ըստ շառավղի ու երկարության փոփոխվող ինտենսիվությամբ։*

*Լուծումը տրվում է շարքով՝ ըստ (4) եզրային խնդրի սեփական ֆունկցիաների և Բեսսելի ձևափոխված ֆունկցիաների, որի հաստատուն գործակիցները որոշվում են գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգից։ Ապացուցվում է, այդ համակարգի սահմանափակ լուծման գոյությունը և հաջորդական մոտավորությունների մեթոդի զուգամիտությունը։*

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Карслоу, Д. Егер,* Теплопроводность твердых тел, Наука, М., 1964. [2] *А. В. Лыков,* Теория теплопроводности, Высшая школа, М., 1967. [3] *Б. М. Левитан,* Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, Гостехиздат, М.—Л., 1950. [4] *А. Я. Григорьев, О. Н. Маньковский,* Инженерные задачи нестационарного теплообмена, Л., 1968. [5] *Р. С. Минасян,* ДАН АрмССР, т. 28, № 4 (1959). [6] *А. Зигмунд,* Тригонометрические ряды. Т. 1, Мир, М., 1968. [7] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов,* Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, М.—Л., 1962. [8] *Р. С. Минасян,* Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, т. 11, № 3 (1958). [9] *Р. С. Минасян,* в кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 8. Вопросы теории тепло- и массопереноса, Минск, 1968.