

УДК 517.582

МАТЕМАТИКА

Г. О. Акопян

**Об оценках производных решений одного класса
 гипоеллиптических уравнений**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Александрияном 16/XI 1985)

Рассмотрим уравнение

$$P(D)u = 0. \quad (1)$$

Л. Хермандером доказано (см. ⁽¹⁾), что все решения $u(x)$ гипоеллиптического уравнения (1) в области $\Omega \subset E_n$ принадлежат некоторому классу Жевре $\Gamma(\Omega)$. Точнее: пусть $P(D)$ гипоеллиптический оператор. Для любого компакта $K \subset \Omega$ существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех мультииндексов $\alpha \geq 0$ и всех решений $u(x)$ уравнения (1)

$$|D^\alpha u(x)| \leq C |\alpha|! \gamma^\alpha, \quad x \in K. \quad (2)$$

При этом в (1) доказано существование числа γ_0 , называемого показателем гипоеллиптичности оператора $P(D)$, такого, что неравенство (2) имеет место при $\gamma = \gamma_0$, но не имеет места при $\gamma = \gamma_0 - \epsilon$, $\epsilon > 0$. Это значит, что полученный результат является неулучшаемым в терминах классов Жевре.

Для регулярных (невыврожденных) операторов, введенных С. М. Никольским ⁽²⁾ и В. П. Михайловым ⁽³⁾, неулучшаемые оценки в терминах классов Жевре для производных решений уравнения (1) получены Г. Г. Казарьяном ⁽⁴⁾.

В настоящей работе результаты статьи ⁽⁴⁾ переносятся на случай более общих (нерегулярных) гипоеллиптических операторов, введенных в ⁽⁵⁻⁸⁾.

Пусть $R_n, E_n(C_n)$ — n -мерные евклидовы пространства точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ ($\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$) с вещественными (соответственно комплексными) координатами, Z_n^+ — n -мерное пространство мультииндексов, т. е. векторов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными координатами, $R_n^{(0)} = \{\xi \in R_n, \prod_{j=1}^n \xi_j \neq 0\}$, $R_n^+ = \{\xi; \xi \in R_n, \xi_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$.

Для $\xi \in R_n$, $\mu \in R_n^+$, $\lambda \in R_n^{(0)} \cap R_n^+$, $\alpha \in Z_n^+$, $t > 0$ положим $|\xi| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \xi_j^2}$, $|\xi|_\lambda = \sqrt{\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{2/\lambda_j}}$, $|\xi|^\mu = |\xi_1|^{\mu_1} \dots |\xi_n|^{\mu_n}$, $t^\lambda \xi = (t^{\lambda_1} \xi_1, \dots, t^{\lambda_n} \xi_n)$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$, $\xi^\alpha =$

$=\xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ ($j=1, \dots, n$) обобщенные

по С. Л. Соболеву производные.

Пусть $P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$ линейный дифференциальный оператор с постоянными комплексными коэффициентами и $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ отвечающий ему характеристический многочлен (полный символ) $(P) = \{\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \gamma_{\alpha} \neq 0\}$.

Определения и терминология, используемые ниже, заимствованы из работ (2,6,7).

Определение 1. Пусть $\mathbb{G} = \{\gamma^k\}_{k=1}^m$, $\gamma^k \in R_n$ ($k=1, \dots, m$). Характеристическим многогранником (х. м.) или многогранником Ньютона $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\mathbb{G})$ набора $\mathbb{G}$ назовем наименьший выпуклый многогранник в R_n , содержащий все точки набора $\mathbb{G}$.

Определение 2. Х. м. набора точек $(P) \cup \{0\}$ назовем х. м. оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$).

Определение 3. Многогранник $\mathfrak{N}$ называется вполне правильным (в. п.), если: а) $\mathfrak{N}$ имеет вершины в начале координат и на всех осях координат и б) все координаты внешних нормалей $(n-1)$ -мерных некоординатных граней $\mathfrak{N}$ положительны.

Обозначим k -мерные ($0 \leq k \leq n-1$) грани многогранника $\mathfrak{N}$ через $\mathfrak{N}_i^k$ ($i=1, \dots, M_k$). $(n-1)$ -мерная грань $\mathfrak{N}_i^{n-1}$ ($i=1, \dots, M_{n-1}$) многогранника $\mathfrak{N}$ называется главной, если единичная внешняя нормаль $\lambda^i = (\lambda_1^i, \dots, \lambda_n^i)$ этой грани имеет хотя бы одну положительную координату. Главная грань $\mathfrak{N}_i^{n-1}$ называется вполне правильной (в. п.), если $\lambda_j^i > 0$ ($j=1, \dots, n$). Точка $\alpha \in \mathfrak{N}$ называется главной (соответственно в. п.), если α является предельной хотя бы для одной $(n-1)$ -мерной главной (соответственно в. п.) грани многогранника $\mathfrak{N}$. Грань $\mathfrak{N}_i^k$, $k < n-1$, называется главной (соответственно в. п.), если она состоит из главных (соответственно в. п.) точек.

Определение 4. Грань $\mathfrak{N}_i^k$, ($i=1, \dots, M_k$; $k=0, \dots, n-1$) $\mathfrak{N}(P)$ многочлена $P(\xi)$ назовем регулярной (невырожденной), если подмногочлен $P^{i,k}(\xi)$, отвечающий грани $\mathfrak{N}_i^k$, удовлетворяет условию

$$P^{i,k}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{N}_i^k} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha} \neq 0, \quad \xi \in R_n^{(0)}.$$

Грани, не являющиеся регулярными, будем называть нерегулярными. Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) назовем регулярным (невырожденным), если все главные грани х. м. $\mathfrak{N}(P)$ регулярны. В противном случае оператор $P(D)$ назовем нерегулярным (вырожденным).

Обозначим через $\Lambda_i^k = \Lambda_i^k(P)$ множество тех внешних (относительно $\mathfrak{N}$) нормалей λ k -мерной в. п. некоординатной грани $\mathfrak{N}_i^k$ ($0 \leq k \leq n-1$, $1 \leq i \leq M_k$) х. м. $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(P)$, для которых $\min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j = 1$ и $\Lambda^{n-1} =$

$$= \bigcup_{i=1}^{M_{n-1}} \Lambda_i^{n-1}.$$

Пусть $v^k \in R_n^+$ ($k=1, \dots, m$). Положим $h(\xi) = \sum_{k=1}^m |\xi^{v^k}|$, а через $\mathfrak{M}(h)$

обозначим х. м. набора $\{v^k\}_{k=1}^m$.

Определение 5. Функция $h(\xi)$ называется весом гипоеллиптичности оператора $P(D)$, если для некоторой постоянной $C > 0$

$$A(\xi) = \sum_{\alpha \neq 0} \left| \frac{D^\alpha P(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/|\alpha|} \leq \frac{C}{h(\xi)}, \quad \forall \xi \in R_n, \quad P(\xi) \neq 0,$$

при этом для любого $v \in R_n^+ \setminus \mathfrak{M}(h)$, $v \neq 0$, существует последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$ такая, что при $s \rightarrow \infty$ $\xi^s \rightarrow \infty$ и

$$[h(\xi^s) + |(\xi^s)^v|] \cdot A(\xi^s) \rightarrow \infty.$$

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество гипоеллиптических операторов с постоянными коэффициентами, все k -мерные главные грани ($k \leq n-1$) х. м. $\mathfrak{M}(P)$ которых регулярны, и положим для $P \in \mathcal{P}$

$$\mathfrak{M}(P) = \{v; v \in R_n^+; |\xi^v| \cdot A(\xi) \leq \text{const} < \infty, \xi \in R_n\}.$$

Пусть все главные грани х. м. $\mathfrak{M}(P)$ оператора $P \in \mathcal{P}$ регулярны, за исключением, быть может, единственной главной грани $\mathfrak{M}_\lambda^{n-1}$, $\lambda_0 \in \Lambda^{n-1}$ нормаль грани $\mathfrak{M}_\lambda^{n-1}$, $0 < \delta < 1$. Положим

$$\Sigma(p^{i, n-1}) = \{\tau \in R_n^{(0)}, p^{i, n-1}(\tau) = 0\},$$

$$B(\delta) = \{v; v \in R_n^+, (\lambda^0, v) \leq \delta; (\lambda, v) \leq 1, \forall \lambda \in \Lambda^{n-1} \setminus \{\lambda^0\}\}.$$

Лемма 1. Пусть все главные грани х. м. оператора $P \in \mathcal{P}$, за исключением главных нерегулярных граней $\mathfrak{M}_1^{n-1}, \dots, \mathfrak{M}_N^{n-1}$, регулярны, тогда существуют числа δ_i , $0 < \delta_i < 1$ ($i=1, \dots, N$) такие, что

$$\mathfrak{M}(P) = B(\delta_1, \dots, \delta_N) = \{v; v \in R_n^+; (\lambda^i, v) \leq \delta_i, i=1, \dots, N, (\lambda, v) \leq 1, \forall \lambda \in \Lambda^{n-1} \setminus \{\lambda^1, \dots, \lambda^N\}\},$$

где λ^i — внешняя нормаль грани $\mathfrak{M}_i^{n-1}$ ($i=1, \dots, N$).

Согласно лемме 1 множество $\mathfrak{M}(P)$ является многогранником, поэтому если обозначить через e^k , $k=0, \dots, M'$, вершины многогранника $\mathfrak{M}(P)$ и положить $h(\xi) = \sum_{k=0}^{M'} |\xi^{e^k}|$, то функция $h(\xi)$, порождаемая многогранником $\mathfrak{M}(P)$, будет весом гипоеллиптичности оператора $P \in \mathcal{P}$.

Пусть $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(P)$ — вполне правильный х. м., $h(\xi)$ — вес оператора $P \in \mathcal{P}$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ — произвольная точка из $\mathfrak{M}(P)$ с рациональными компонентами. Обозначим через $k(v)$ наименьшее натуральное число такое, что $k(v) \cdot v \in Z_n^+$. Положим также $N(P) = \{u; u \in C(E_n), P(D)u = 0\}$. Имеет место

Теорема 1. Пусть $h(\xi)$ вес гипоеллиптичности оператора $P \in \mathcal{P}$ и $v \in \mathfrak{M}(P)$ вектор с рациональными компонентами. Пусть $u \in N(P)$ и K произвольный компакт из E_n . Тогда существует постоянная $C = C(K) > 0$ такая, что для всех $j=0, 1, \dots$

$$\sup_{x \in K} |D^{[k(v), \cdot]} u(x)| \leq C^j \cdot j^{k(v) \cdot j}.$$

Результат теоремы 1 является неулучшаемым, как показывает следующая

Теорема 2. Пусть все главные грани х. м. оператора $P \in \mathcal{F}$ регулярны, а грань $\mathfrak{M}_{i_0}^{n-1}$ не регулярна $x_0 \in \Omega$. Если для любой функции $u \in N(P, \Omega) = \{v, v \in C(\Omega), P(D)v = 0\}$ существуют постоянная $C = C(u) > 0$, мультииндекс $\alpha \neq 0$ и рациональное число $l = l(u)$ такие, что

$$|D^{\alpha} u(x_0)| \leq C^j \cdot j^{l-1}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\text{то } \frac{\alpha}{l} = \left(\frac{\alpha_1}{l}, \dots, \frac{\alpha_n}{l} \right) \in \mathfrak{M}(P).$$

Замечание. Аналогичное утверждение имеет место и в случае наличия нескольких $(n-1)$ -мерных нерегулярных граней х. м. $\mathfrak{M}(P)$.

Доказательства теорем 1, 2 проводятся модификацией методов, разработанных в ⁽²⁻⁷⁾ с использованием свойств множества $\mathfrak{M}(P)$, порождающего вес гипоеллиптичности оператора $P(D)$.

Приведем пример, иллюстрирующий сформулированные результаты.

Пусть $n=2$, $P(\xi) = \xi_2^8 + \xi_1^6(\xi_1 - \xi_2)^6 + \xi_1^8 \cdot \xi_2^8 + 1$. Очевидно, что $P \in \mathcal{F}$, следовательно по лемме 1 $\mathfrak{M}(P) = B(\delta_0) = \{v; v \in R_2^*, v_1 + 3v_2 \leq 1; v_1 + v_2 \leq \delta_0\}$, где $\delta_0 = \frac{2}{3}$.

Весом гипоеллиптичности многочлена $P(\xi)$ является функция

$$h(\xi) = |\xi_1|^{2/3} + |\xi_2|^{1/3} + |\xi_1|^{1/2} \cdot |\xi_2|^{1/6}.$$

По теореме 1 для $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6} \right) \in \mathfrak{M}(P)$ и для произвольного компакта $K \subset \Omega$, где Ω открытое множество из R_2 , существует постоянная $C_1 = C_1(K) > 0$ такая, что

$$\sup_{x \in K} |D_1^{3j} D_2^j u(x)| \leq C_1^j \cdot j^{6 \cdot j}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3)$$

С другой стороны, по теореме 4.4.6 работы ⁽¹⁾

$$\sup_{x \in K} |D_1^{3j} D_2^j u(x)| \leq C_1^j \cdot j^{7.5 \cdot j}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Сравнение полученных неравенств (3) и (4) показывает, что на самом деле решения уравнения (1) имеют лучшие свойства гладкости (в смысле принадлежности к пространству Жевре), чем это следовало из теорем 4.4.6 работы ⁽¹⁾.

Ереванский государственный
университет

Հիպոէլիպտիկ հավասարումների մի դասի լուծումների
ածանցյալների գնահատականների մասին

Աշխատանքում ստացված են $P(D)u=0$ հավասարման լուծումների
լավագույն գնահատականներ, որտեղ $P(D)$ -ն հաստատուն գործակիցներով
ոչ ռեգուլյար հիպոէլիպտիկ օպերատոր է, որը բավարարում է որոշակի պայ-
մաններին:

Գնահատականները ստացված են հիպոէլիպտիկության կշռի գաղափարի
հիման վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Л. Хермандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, Мир, М., 1965. ² С. М. Никольский, ДАН СССР, т. 146, № 4 (1962). ³ В. П. Михайлов, Тр. МИАН, № 91 (1967). ⁴ Г. Г. Казарян, Мат. сб., т. 128, № 3 (1985).
В. Pini, Bull. Un. Math. Ital., 18 (3) (1963). ⁵ Г. Г. Казарян, ДАН СССР, т. 214.
№ 5 (1974). ⁶ Г. Г. Казарян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 15, № 6 (1980)
⁷ В. Н. Маргарян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 15, № 6 (1980).

