

УДК 519.6

МАТЕМАТИКА

А. К. Матевосян

Присоединенные операторы сдвига и их приложения

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 22/II 1985)

1. Известно, что с каждым ортогональным базисом связано некоторое семейство операторов обобщенного сдвига (о. с.) A^s , так что функции базиса $\varphi_k(t)$, $t \in \Omega$, Ω — бикompактное топологическое пространство, удовлетворяют соотношению

$$A^s \varphi_k(t) = \varphi_k(s) \cdot \varphi_k(t). \quad (1)$$

В общем виде о. с. введены Б. М. Левитаном ⁽¹⁾ как операторы, удовлетворяющие некоторым аксиомам. Если $R(t, s)$ — некоторая эрмитова функция вида

$$R(t, s) = \tilde{A}^s r(t), \quad (2)$$

где $\tilde{A}^s$ обозначает сопряженный к A^s оператор, то собственные функции о. с. A^s , определяемые по (1), являются собственными функциями ядра $R(t, s)$. Этот факт в достаточной мере отражает теоретическую и прикладную роль о. с. и их собственных функций. Достаточно отметить, что собственные функции о. с. A^s являются базисом Карунена—Лоэва (2) для случайного процесса с нулевым средним и ковариационной функцией вида ⁽³⁾.

Каноническое представление функции двух переменных, в общем случае не обладающей эрмитовой симметрией, заключается в разложении по сингулярным базисам ⁽³⁾, что обобщает метод разложения по собственным функциям. Причем здесь приходится оперировать с двумя ортогональными базисами — правым и левым сингулярными базисами.

Техника разложений по сингулярным базисам представляет мощный аппарат решения самых различных задач. Здесь необходимо отметить возможности этого метода в цифровой обработке двумерных изображений ⁽²⁾, а именно, в задачах сжатого описания изображений и восстановления «смазанных» изображений. Широкое практическое применение разложений по сингулярным базисам ограничено сложностями вычислительного характера.

В настоящей заметке аксиоматически определяются и изучаются аналогии о. с., возникающие при каноническом представлении функции двух переменных по сингулярным базисам. Рассматриваются приложения этих операторов.

2. Пусть на функциях $f(t) \in C(\Omega)$ определены семейства операторов A^s и B^s , зависящих от элемента $s \in \Omega$ как от параметра,

т. е. каждой функции $f(t)$ ставятся в соответствие функции двух переменных $A_i^s f(t)$ и $B_i^s f(t)$, где нижний индекс t подчеркивает, что операторы A^s и B^s применяются к функции f как к функции от переменной t . Пусть выполняются следующие условия: 1) операторы A^s являются о. с.; 2) операторы B^s линейны; 3) функция $B_i^s f(t)$ непрерывна по совокупности переменных; 4) для каждой функции $f(t) \in C$ и каждых точек $r, s, t \in \Omega$ выполняется равенство

$$A_i^t B_i^s f(r) = B_i^s A_i^t f(r). \quad (3)$$

Семейства операторов A^s и B^s , $s \in \Omega$, удовлетворяющие условиям 1—4, назовем о. с. и присоединенными о. с. (п. о. с.) соответственно. Отметим, что таковыми являются семейства операторов A^s и A^s .

Ниже R^s и Q^s обозначают двойственные относительно A^s и B^s операторы ⁽¹⁾, которые определяются из равенств

$$R_i^s f(t) = A_i^t f(s), \quad Q_i^s f(t) = B_i^t f(s).$$

Пусть для каждой функции $f(t) \in C$ и каждых точек $r, s, t \in \Omega$ выполняются условия ⁽¹⁾:

$$\tilde{A}_i^r A_i^s f(t) = A_i^s \tilde{A}_i^r f(t), \quad (4)$$

$$\tilde{R}_i^r A_i^s f(t) = \tilde{A}_i^r A_i^s f(t). \quad (5)$$

Такие о. с. назовем регулярными. Регулярными являются о. с. на группе. Предположим также, что для каждой функции $f(t) \in C$ и каждых точек $r, s, t \in \Omega$ выполняются условия:

$$\tilde{B}_i^r A_i^s f(t) = A_i^s \tilde{B}_i^r f(t), \quad (6)$$

$$\tilde{Q}_i^r B_i^s f(t) = \tilde{A}_i^r A_i^s f(t), \quad (7)$$

являющиеся аналогами условий (4) и (5).

Теорема 1. Пусть $D(t)$ линейное представление размерности n о. с. A^s , тогда существует семейство матриц $C(t)$ размерности n , $t \in \Omega$, такое, что:

$$B_i^r D(t) = C(r) \cdot D(t), \quad (8)$$

$$\tilde{B}_i^r D(t) = C^*(r) \cdot D(t),$$

$$\tilde{Q}_i^r C(t) = D(t) \cdot D^*(r),$$

где $*$ — знак эрмитового сопряжения матрицы.

Семейство матриц $C(t)$, удовлетворяющих (8), назовем представлениями п. о. с. B^s .

Теорема 2. Пусть $C^q(t) = \{c_{ij}^q(t)\}_{i,j}^n$ и $C^p(t) = \{c_{ij}^p(t)\}_{i,j}^n$ есть два неэквивалентных неприводимых представления п. о. с. B^s , тогда матричные элементы этих представлений удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int_{\Omega} c_{in}^p(t) \overline{c_{km}^q(t)} dt = \alpha_p \delta_{p,q} \delta_{i,k} \delta_{n,m},$$

¹⁾ — символ Кронекера.

При доказательстве теорем используются методы ⁽¹⁾.

3. Пусть A^s и B^s есть семейства о. с. и п. о. с., причем операторы A^s коммутируют, тогда размерности всех неприводимых представлений равны 1, т. е. матрицы $D(t)$ и $C(t)$ переходят в функции $\varphi_k(t)$ и $\psi_k(t)$ такие, что

$$A_i^s \varphi_k(t) = \varphi_k(s) \varphi_k(t), \quad B_i^s \varphi_k(t) = \psi_k(s) \psi_k(t). \quad (9)$$

Предложение 1. Пусть семейства операторов A^s и B^s , $s=1, 2, \dots, N$, есть регулярные о. с. и п. о. с. соответственно и пусть матрица $a(t, s)$, $t, s=1, 2, \dots, N$, представима в виде

$$a(t, s) = \tilde{B}^s b(t), \quad (10)$$

тогда системы представлений $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^N$ о. с. A^s и $\{\psi_k(t)\}_{k=1}^N$ п. о. с. B^s образуют сингулярные базисы матрицы $a(t, s)$, соответствующие сингулярным значениям $\rho_k = \sum_{t=1}^N b(t) \overline{\varphi_k(t)}$.

Пусть теперь $\varphi_k(t)$ и $\psi_k(t)$ — два базиса N -мерного пространства и $\varphi_k(s_0) = 1$ для всех $k=1, 2, \dots, N$. Тогда существуют единственные числа $a(t, s, r)$ и $b(t, s, r)$, удовлетворяющие равенствам $\varphi_k(s) \varphi_k(t) = \sum_{r=1}^N a(t, s, r) \varphi_k(r)$, $\psi_k(s) \varphi_k(t) = \sum_{r=1}^N b(t, s, r) \varphi_k(r)$, $t, s, k=1, 2, \dots, N$.

Кубические матрицы $a(t, s, r)$ и $b(t, s, r)$ размерности N задают коммутативные операторы A^s и B^s , удовлетворяющие условиям 1, 2, 4. Таким образом, по каждой невырожденной матрице посредством ее сингулярных базисов могут быть определены о. с. и п. о. с. так, что функции сингулярных базисов удовлетворяют (9), а п. о. с. B^s определяет тип „перемешивания“, которым из некоторого вектора $b(t)$ строится матрица $a(t, s)$. Использование этого факта в определенной мере устранит вычислительные трудности, связанные с применением разложения по сингулярным значениям.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ա. Կ. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

Տեղաշարժի կցված օպերատորները և նրանց կիրառումները

Աբստրակտների միջոցով սահմանվում և ուսումնասիրվում են Բ. Մ. Հևիտանի ընդհանրացված տեղաշարժի օպերատորների զուգահեռները, որոնք անոցիացվում են երկու տարրեր օրթոգոնալ բազիսների հետ: Դիտարկվում են սահմանված օպերատորների կիրառումները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Б. М. Левитан, Теория операторов обобщенного сдвига, Наука, М., 1973. ² Обработка изображений и цифровая фильтрация, под ред. Т. Хуанга, Мир, М., 1979. ³ В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов, Матрицы и вычисления, Наука, М., 1984.