ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1986 5

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Н. К. Хачатрян

Гамильтоновость и системы различных представителей в семействах подмножеств вершин графа

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 21/II 1985)

В работе найдены достаточные условия гамильтоновости графа, использующие структурные характеристики окрестностей вершин. Предложены полиномиальные алгоритмы для построения гамильтонового цикла в графах, удовлетворяющих найденным условиям. Все не определяемые понятия и обозначения можно найти в ([1]).

Рассматриваются конечные неориентированные графы без кратных ребер и петель. Множества вершин и ребер графа G обозначаются, соответственно, через $V(G)$ и $E(G)$. Степень вершины x в G обозначается через $d_G(x)$, множество вершин, смежных с x, —через $N_G(x)$, а расстояние между вершинами x и y в G—через $d_G(x, y)$. Гамильтоновым циклом графа G называется простой цикл, содержащий все вершины G. Если в графе G существует гамильтонов цикл, то G называется гамильтоновым графом. Введем обозначения:

$$\varepsilon_G(x)=\{y\in N_G(z)|z\in N_G(x),\ d_G(y)\leqslant d_G(x)\};$$

$$F_G(x)=\{Q(z)|z\in N_G(x)\},\text{ где } Q(z)=\{y\in N_G(z)|d_G(y)\leqslant d_G(x)\};$$

$$A_G(x, y)=\{B(z)|z\in N_G(x)\},\text{ где } B(z)=N_G(z)\setminus(\{y\}\cup N_G(y));$$

$M_G(x)=\{y\in V(G)|d_G(x, y)\leqslant 2\}$; $G(x)$—подграф графа G, порожденный множеством вершин $M_G(x)$.

Определение 1. Скажем, что p-вершинный граф G обладает свойством μ, если $p\geqslant 3$, в G нет изолированных вершин и

а) для каждого $x\in V(G)$ с $d_G(x)<\frac{p-1}{2}$ семейство $F_G(x)$ не имеет системы различных представителей (сокращенно с. р. п.);

б) для каждого $x\in V(G)$ с $d_G(x)=\frac{p-1}{2}$ семейство $F_G(x)$ не имеет с. р. п. или $|\varepsilon_G(x)|\leqslant\frac{p-1}{2}$.

Прежде чем перейти к изложению основных теорем, приведем одно простое необходимое условие гамильтоновости графа.

Утверждение. Если граф G с вершинами $x_1, x_2, \ldots, x_p$ гамильтонов, то семейство множеств $\{N_G(x_i)|1\leqslant i\leqslant p\}$ имеет с. р. п.

Теорема 1. *Если граф G обладает свойством μ, то G—гамильтонов.*

Теорема 1 обобщает результаты, полученные в ([2]). Отметим, что для каждого $p \geqslant 13$ существует граф G_p с $V(G_p)=\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$, $E(G_p)=\{(x_1, x_5), (x_1, x_6), (x_1, x_7), (x_2, x_5), (x_2, x_8), (x_2, x_9), (x_3, x_5), (x_3, x_{10}), (x_3, x_{11}), (x_4, x_5), (x_4, x_{12}), (x_4, x_{13})\} \cup \{(x_i, x_j) \mid 5 \leqslant i < j \leqslant p\}$, который обладает свойством μ. Граф G_p не удовлетворяет условиям гамильтоновости, найденным в работах ([2–7]). В графе G, удовлетворяющем условию μ, гамильтонов цикл строится в три этапа. Сперва граф G достраивается специальным образом до графа $[G]$ (см. ([8])). Затем в графе $[G]$ с помощью алгоритма, работающего по принципу: „иди в соседнюю еще не пройденную вершину минимальной степени“, —строится гамильтонов цикл. И, наконец, построенный гамильтонов цикл преобразуется в гамильтонов цикл графа G. Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 3 в ([2]).

Теорема 2. *Если в графе G $(x, y) \notin E(G)$ и семейство $A_G(x, y)$ не имеет с. р. п., то граф G гамильтонов тогда и только тогда, когда граф $G+\{(x, y)\}$ гамильтонов.*

Доказательство. Предположим, теорема неверна. Это означает, что существует негамильтоновый граф G с гамильтоновой цепью $x=x_1, x_2, \ldots, x_p=y$, $p=|V(G)| \geqslant 3$ и семейство $A_G(x, y)$ не имеет с. р. п. Пусть $N_G(x_1)=\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\}$, $n \geqslant 1$, $2=i_1<i_2<\ldots<i_n \leqslant p-1$. Тогда $(x_p, x_{i_j-1}) \notin E(G)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, так как иначе в G имелся бы гамильтонов цикл $x_1, x_2, \ldots, x_{i_j-1}, x_p, x_{p-1}, \ldots, x_{i_j}, x_1$. Отсюда следует, что семейство $A_G(x, y)$ имеет с. р. п. —$(x_{i_1-1}, x_{i_2-1}, \ldots, x_{i_n-1})$, что противоречит выбору G. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Если в графе G $(x, y) \notin E(G)$ и $d_G(x)+d_{G(x)}(y) \geqslant |M_G(x)|$, то граф G гамильтонов тогда и только тогда, когда граф $G+\{(x, y)\}$ гамильтонов.

Следствие 2 ([3]). Если в графе G $(x, y) \notin E(G)$ и $d_G(x)+d_G(y) \geqslant |V(G)|$, то граф G гамильтонов тогда и только тогда, когда граф $G+\{(x, y)\}$ гамильтонов.

Лемма 1 ([4]). *Если $x_1, x_2, \ldots, x_k$—тупиковая цепь графа G и $d_G(x_1)+d_G(x_k) \geqslant k$, то в подграфе, порожденном вершинами $x_1, x_2, \ldots, x_k$, существует гамильтонов цикл.*

Пусть G—граф с вершинами $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Тупиковой цепью в графе G назовем такую цепь $x_{l_1}, x_{l_2}, \ldots, x_{l_k}$, что $N_G(x_{l_1}) \subset \{x_{l_1}, x_{l_2}, \ldots, x_{l_k}\}$ и $N_G(x_{l_k}) \subset \{x_{l_1}, x_{l_2}, \ldots, x_{l_k}\}$ Опишем алгоритм Q, который строит в графе G тупиковую цепь P.

Шаг 1. $j:=1$. Строим в графе G тупиковую цепь $x_1^j, x_2^j, \ldots, x_{k_j}^j$. $P:=x_1^j x_2^j \ldots x_{k_j}^j$.

Шаг 2. Если $(x_1^j, x_{k_j}^j) \notin E(G)$, то перейти к шагу 5.

Шаг 3. Если P гамильтонов цикл в G, то стоп.

Шаг 4. Если существует вершина, не принадлежащая циклу P (обозначим z_1^j) и смежная с вершиной x_l^j, $1<l<k_j$, $(x_l^j, z_1^j) \in E(G)$, то строим более длинную цепь следующим образом: $P:=y_1^j y_2^j \ldots$ $\ldots y_{s_j}^j x_{l+1}^j x_{l+2}^j \ldots x_{k_j}^j x_1^j x_2^j \ldots x_l^j z_1^j z_2^j \ldots z_{n_j}^j \equiv x_1^{j+1} x_2^{j+1} \ldots x_{k_{j+1}}^{j+1}$; $(y_i^j, y_{i+1}^j) \in$

$\in E(G)$, $1 \leqslant i < s_j$; $(y^j_{s_j}, x^j_{i+1}) \in E(G)$; $(z^j_i, z^j_{i+1}) \in E(G)$, $1 \leqslant i < n_j$; $(N_G(x^{j+1}_1) \cup \cup N_G(x^{j+1}_{k_{j+1}})) \subseteq \{x^{j+1}_1, x^{j+1}_2, \ldots, x^{j+1}_{k_j+1}\}$; $j:=j+1$. Иначе, если такой вершины z^j_1 нет, граф G не связный и алгоритм завершает работу. Перейти к шагу 2.

Шаг 5. Если $d_G(x^j_1)+d_G(x^j_{k_j}) \geqslant k_j$, то по лемме 3 существует такое s, $2 \leqslant s \leqslant k_j-2$, что $x^j_1, x^j_{s+1}), (x^j_s, x^j_{k_j}) \in E(G)$ и можем перестроить цепь P. $P:=x^j_1x^j_2\ldots x^j_sx^j_{k_j}x^j_{k_j-1}\ldots x^j_{s+1} \equiv x^{j+1}_1x^{j+1}_2\ldots x^{j+1}_{k_{j+1}}$. $j:=j+1$. Перейти к шагу 2.

Шаг 6. Если $d_G(x^j_1) < d_G(x^j_{k_j})$, то $P:=x^j_{k_j}x^j_{k_j-1}\ldots x^j_1 \equiv x^{j+1}_1x^{j+1}_2\ldots$ $\ldots x^{j+1}_{k_{j+1}}$. $j:=j+1$.

Шаг 7. Пусть $N_G(x^j_{k_j})=\{x^j_{i_1}, x^j_{i_2}, \ldots, x^j_{i_n}\}$, $i_1<i_2<\ldots<i_n$. Найдем минимальное l, $1 \leqslant l < i_1$, такое, что существует s, $1 \leqslant s < n$, для которого $(x^j_l, x^j_{i_s+1})$, $(x^j_{i_s}, x^j_{k_j}) \in E(G)$. $P:=x^j_1x^j_2\ldots x^j_lx^j_{i_s+1}x^j_{i_s+2}\ldots$ $\ldots x^j_{k_j}x^j_{i_s}x^j_{i_s-1}\ldots x^j_{l+1} \equiv x^{j+1}_1x^{j+1}_2\ldots x^{j+1}_{k_{j+1}}$. $j:=j+1$. Если такого l не существует, то алгоритм завершает работу. Перейти к шагу 2.

Теорема 3. *Связный граф G с p вершинами, $p \geqslant 3$, является гамильтоновым, если для каждой пары вершин $x, y \in V(G)$ с $d_G(x) < \frac{p}{2}$ и $d_G(x, y)=2$ семейство $A_G(x, y)$ не имеет с. р. п.*

Доказательство. Достаточно показать, что алгоритм Q строит в графе G, удовлетворяющем условиям теоремы, гамильтонов цикл. Заметим, что каждый возврат к шагу 2 алгоритма Q происходит либо после удлинения цепи, либо после уменьшения числа i_1, описанного на шаге 7. Поэтому ясно, что если не произойдет остановки алгоритма на шагах 4 и 7, то будет построен гамильтонов цикл. Так как граф G связный, то остановки на шаге 4 произойти не может. Покажем невозможность остановки на шаге 7. Для этого достаточно доказать, что существует s, $1 \leqslant s < n$, для которого $(x^j_{i_1-1}, x^j_{i_s+1})$, $(x^j_{i_s}, x^j_{k_j}) \in E(G)$. Предположим $(x^j_{i_1-1}, x^j_{i_s+1}) \notin E(G)$, $1 \leqslant s < n$. Тогда заметим, что по работе алгоритма на шаге 7 $d_G\ (x^j_{k_j}) < \frac{k_j}{2} \leqslant \frac{p}{2}$ и по предположению $A_G(x^j_{k_j}, x^j_{i_1-1})$ имеет с. р. п. $(x^j_{i_1+1}, x^j_{i_2+1}, \ldots, x^j_{i_n+1})$. Это противоречит условию теоремы. Теорема 2 доказана.

Следствие 3. *Связный p-вершинный, $p \geqslant 3$, граф G гамильтонов, если для каждой пары вершин x, y, где $d_G(x) < \frac{p}{2}$ и $d_G(x, y)=2$, выполняется неравенство $d_G(x)+d_{G(x)}(y) \geqslant |M_G(x)|$.*

Следствие 3 является обобщением теоремы Оре ([4]).

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственнго университета

Ն. Կ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Գրաֆի համիլտոնությունը և նրա գագաթների ենթաբազմությունների ընտանիքների տարբեր ներկայացուցիչների համակարգերը

Ստացված է գրաֆի համիլտոնյան երեք բավարար պայման, որոնք հիմնըված են գագաթային շրջակայքերի կառուցվածքային բնութագրերի վրա։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Харари,* Теория графов, Мир, М., 1973. [2] *А. С. Асратян, Н. К. Хачатрян* Мат. заметки, т. 35, № 1 (1984) [3] *I. A. Bondy, V. Chvatal,* Discrete Math., v. 15, p. 111—135 (1976). [4] *O. Ore,* Amer. Math. Monthly, v. 67, 55 (1960). [5] *P. Erdös, V. Chvatal,* Discrete Math., v. 2, p. 111—113 (1972). [6] *I. A. Nach-Williams,* Studies in pure mathematics, Academic Press, N. Y., 1971. [7] *G. G. Nicoghossian, P. Häggkvist,* J. Combin. Theory, B, v. 30, p. 118—120 (1981).