УДК 517.925+517.53

МАТЕМАТИКА

Г. А. Барсегян

Метод оценки порядка мероморфных решений алгебраических дифференциальных уравнений, основанный на свойстве «близости a -точек».

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракелянном 26/XI 1984)

Основной метод оценки порядков* целых решений алгебраических дифференциальных уравнений высших порядков основан на теореме Вимана—Валирона. Исследование же порядков мероморфных решений проводилось до сих пор исключительно для определенных конкретных уравнений.

Ниже изучаются алгебраические дифференциальные уравнения следующего класса: $\mathfrak{M}_\varphi$ -мероморфных в $|z| < \infty$ функций $w(z)$, являющихся решениями уравнения

$$P_1(z, w, w') = P_2(z, w, w', \dots, w^{(n)}), \quad (1)$$

где P_1 —полином от каждой из переменных, P_2 —рациональная функция от каждой из переменных и для нее в $a_1, \dots, a_s$ -точках функции w , лежащих в $|z| \leq r$, выполняется соотношение

$$|P_2(z, a_\nu, w'(z), \dots, w^{(n)}(z))| \leq \varphi(r), \quad \nu = 1, 2, \dots, s. \quad (2)$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $w \in \mathfrak{M}_\varphi$, где φ —функция конечного порядка. Тогда $w(z)$ имеет конечный порядок.

Положив $P_2 \equiv 0$ в теореме 1, получим следующее

Следствие 1 (А. А. Гольдберг (*)). *Всякое мероморфное решение алгебраического дифференциального уравнения первого порядка имеет конечный порядок.*

Следствие 2. *Всякое мероморфное решение уравнения*

$$P_1(z, w, w') / P_2(z, w, w', \dots, w^{(n)}) = \prod_{\nu=1}^q (w - a_\nu)$$

имеет конечный порядок.

Отметим, что следствие 2 включает в себе следующую качественную информацию: равенство нулю функции $P_1(z, w, w')$ лишь в

* Порядок функции $\varphi(r)$ действительного переменного определяется как $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\ln \varphi(r) / \ln r)$. Порядок мероморфной функции $w(z)$ —порядок ее неванлиновской характеристической функции $T(r, w)$; здесь и в дальнейшем пользуемся стандартной терминологией и обозначениями теории распределения значений (см. (1)).

$a_1, a_2, \dots, a_s$ -точках достаточно для вывода о конечности порядка мероморфной функции, удовлетворяющей этому условию.

Доказательство теоремы 1 основано на оценках производных мероморфных функций на множествах ее a -точек; оценки же эти, в свою очередь, выводятся из свойства „близости a -точек“ мероморфных функций, которое выявляет следующая

Теорема А (см. (3)). Пусть $w(z)$ —мероморфная в $|z| < \infty$ функция; $\psi(r)$ —монотонная функция, $\psi(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow \infty$; $a_i \in \bar{\mathbb{C}}$ попарно различны. Тогда для любого $r \notin E$, где E —некоторое множество конечной логарифмической меры, в круге $|z| \leq r$ можно указать $\Phi(r)$ односвязных непересекающихся областей $E_i(r)$, $i=1, 2, \dots, \Phi(r)$, удовлетворяющих условиям:

I) $w(z)$ —однолистка в $\overline{E_i(r)}$, $i=1, 2, \dots, \Phi(r)$;

II) $(\Phi(r)/A(r)) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$, $r \notin E$,

III) $\sum_{i=1}^{\Phi(r)} d(E_i(r)) \leq K\psi(r)rA^{1/2}(r)$,

где $d(E_i(r))$ —диаметр $E_i(r)$, $K=K(a_1, a_2, \dots, a_q) = \text{const} < \infty$;

IV) $\sum_{i=1}^q n_0(r, a_i) \geq [q-4-o(1)]A(r)$, $r \rightarrow \infty$, $r \notin E$, (3)

где $n_0(r, a_i)$ —количество a_i -точек в $\bigcup_{i=1}^{\Phi(r)} E_i(r)$.

Теорема А показывает, что близки не только количества $a_1, a_2, \dots, a_q$ -точек функции $w(z)$ в кругах $|z| \leq r$ (как это следует из теорий Р. Неванлинны и Л. Альфорса), но также, одновременно, близки их модули и аргументы (это следует из свойств I—IV теоремы А и первой основной теоремы теории распределения значений, согласно которым в каждой области $E_i(r)$ лежит в среднем от $q-4$ до q $a_1, a_2, \dots, a_q$ -точек, а диаметры областей $E_i(r)$ „малы“). Таким образом в большинстве своем $a_1, \dots, a_q$ -точки близко располагаются друг к другу.

Используя некоторые детали доказательства теоремы А, из нее выводим следующие оценки: области $E_i(r)$ можно выбрать таким образом, чтобы для всякой a_ν -точки $z_{\nu,j}$, $\nu=1, 2, \dots, q$, лежащей в $\bigcup E_i(r)$, $i=1, 2, \dots, \Phi(r)$, выполнялось неравенство

$$|w'(z_{\nu,j})| \geq \frac{KA^{1/2}(r)}{r\psi(r)}, \quad j=1, 2, \dots, n_0(r, a_\nu), \quad (4)$$

где $K=K(a_1, \dots, a_q) = \text{const} > 0$; тем самым приведенное свойство „близости a -точек“ дополняется указанием оценок снизу $|w'|$ в a -точках функции $w(z)$.

Доказательство теоремы 1 легко вытекает из приведенных выше утверждений (3) и (4). В самом деле. Пусть $a_1, \dots, a_s$ те же, что в определении класса $\mathfrak{M}_q$; $z_{\nu,j}$ — a_ν -точки функции $w(z)$, лежащие в $|z| \leq r$, $\nu=1, 2, \dots, 5$, $j=1, 2, \dots$. Согласно свойству IV теоремы А при $r \notin E$ хотя бы для одного значения a_ν (положим для a_1) выполняется неравенство

$$n_0(r, a_1) > A(r)/6, \quad (5)$$

причем в каждой точке $z_{1,j}$ выполняется оценка (4). По определению класса $\mathfrak{M}_\varphi$ имеем

$$|P_1(z_{1,j}, a_1, \omega(z_{1,j}), \omega'(z_{1,j}), \dots, \omega^{(n)}(z_{1,j}))| \leq \varphi(r). \quad (6)$$

Известно (4), что корни полинома $z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m$ лежат в круге $\max\{|m|b_1|, (m|b_2|)^{1/2}, \dots, (n|b_m|)\}^{1/n}$. Применяв эту оценку к (1) в точках $z_{1,j}$ (которое очевидно может быть записано с учетом (6) в виде $F_{1,0}(z_{1,j}, a_1)[\omega'(z_{1,j})]^m + F_{1,1}(z_{1,j}, a_1)[\omega'(z_{1,j})]^{m-1} + \dots + F_{1,m}(z_{1,j}, a_1) + \varphi_1(z_{1,j}) + i\varphi_2(z_{1,j}) = 0$, где φ_1 и φ_2 величины $O[\varphi(r)]$), получим

$$|\omega'(z_{1,j})| \leq K|z_{1,j}|^p \leq Kr^p, \quad (7)$$

где $p = \text{const} < \infty$ зависит от $F_{1,0}, \dots, F_{1,m}, \varphi(r)$, а количество точек $z_{1,j}$ в круге $|z| \leq r$ удовлетворяет неравенству (5). Остается к неравенству (7) применить неравенство (4), используя которое, получим

$$A(r) \leq Kr^{2p+2}\psi^2(r).$$

Доказательство завершается применением известного предложения — порядки функций $A(r)$ и $T(r)$ совпадают — и учетом того, что $\psi(r)$ может иметь произвольно медленный рост.

В заключение автор выражает благодарность М. В. Федорюку за ценное обсуждение результата.

Институт математики Академии наук
Армянской ССР

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

Հանրահաշվական դիֆերենցիալ հավասարումների մերոմորֆ լուծումների կարգի գեամաաման մեթոդ, հիմնված «ա-կետերի մոտիկության հատկության» վրա

Մինչև այժմ առավելագույն դիտարկվել են առաջին կարգի հանրահաշվական դիֆերենցիալ հավասարումների մերոմորֆ լուծումներ: Մերոմորֆ ֆունկցիաների ա-կետերի մոտիկության հատկության օգնությամբ ապացուցվում է, որ բարձր կարգ ունեցող հետևյալ հավասարման.

$$P_1(z, \omega, \omega') / P_2(z, \omega, \omega', \dots, \omega^{(n)}) = \prod_{v=1}^q (\omega - a_v),$$

որտեղ P_1, P_2 — բազմանդամներն են, իսկ $a_i \neq a_j, i \neq j$, մերոմորֆ լուծումները ունեն վերջավոր կարգ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.—Л., 1941.
² А. А. Гольдберг, Укр. мат. журн., т. 8, с. 254—261 (1956). ³ Г. А. Барсегян, Мат. сб., т. 120 (162), с. 42—67 (1983). ⁴ Г. Полиа, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, т. I, М., Наука, 1978.