ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1986 4

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР О. М. Сапонджян

Об одном решении бигармонической проблемы для бесконечной полосы

(Представлено 21/XI 1985)

Под бигармонической проблемой подразумеваются задачи плоской теории упругости и задача изгиба пластинки, заделанной по контуру. Для бесконечной полосы ряд таких задач решен методом применения интеграла Фурье ([1]). Однако этот метод не применим тогда, когда в контурных условиях задачи участвуют заданные функции, обращающиеся в бесконечность в бесконечно удаленных точках полосы.

В настоящей работе разработан новый метод решения задачи бесконечной полосы. Сущность его заключается в следующем: область единичного круга конформно отображается известной функцией на область полосы, однако используется не ряд этой функции, который расходится для бесконечно удаленных точек полосы, а ряд отношения отображающей функции и ее производной, который сходится для всех точек полосы. Далее, применяя аппарат интеграла типа Коши, решение задачи приводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений, которые для случаев первой основной задачи плоской теории упругости и задачи изгиба пластинки регулярны, а для случаев второй основной задачи плоской теории упругости вполне регулярны.

Контурное условие бигармонической проблемы имеет вид ([2])

$$k_0\varphi_1(t)+t\overline{\varphi_1'(t)}+\overline{\Psi_1(t)}=f_1+if_2, \tag{1}$$

где k_0—постоянное число, принимающее разные значения для указанных задач, t—аффикс произвольной точки контура, f_1 и f_2—заданные на контуре функции, имеющие различные значения для отмеченных задач.

Для решения задачи бесконечной полосы применим метод конформного отображения. Область единичного круга отображается на область полосы шириной $2b$ с помощью соотношения

$$z=\omega(\zeta)=\frac{2b}{\pi}\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta}. \tag{2}$$

При этом $z=0$ соответствует произвольно фиксированной точке продольной оси симметрии полосы, а $\zeta=0$—центру единичного круга.

Обозначив

$$\varphi_1(z)=\varphi(\zeta),\quad \Psi_1(z)=\Psi(\zeta), \tag{3}$$

условие (1) приводим к известному виду

$$k_0\varphi(\eta)+\frac{\omega(\eta)}{\overline{\omega'(\eta)}}\overline{\varphi'(\eta)}+\overline{\Psi(\eta)}=f_1+if_2, \tag{4}$$

где η—аффикс окружности γ единичного круга.

Согласно (2)

$$\omega'(\zeta)=\frac{4b}{\pi(1-\zeta^2)}, \quad \overline{\omega'(\zeta)}=\frac{4b}{\pi(1-\bar{\zeta}^2)}. \tag{5}$$

Учитывая, что $\eta\bar{\eta}=1$, из (4) с учетом (5) получим

$$k_0\varphi(\eta)-\frac{1}{2\eta^2}(1-\eta^2)\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\overline{\varphi'(\eta)}+\overline{\Psi(\eta)}=f_1+if_2. \tag{6}$$

В этом равенстве функция $-\frac{1}{2\eta^2}(1-\eta^2)\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}$, заменяющая функцию $\omega(\eta)/\overline{\omega'(\eta)}$, непрерывна для всех точек окружности γ и, следовательно, для всех точек контуров полосы.

На окружности γ

$$(1-\eta^2)\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}=2\left(\eta-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta^{2k-1}}{4k^2-1}\right). \tag{7}$$

Внеся это выражение в (6), получим

$$k_0\varphi(\eta)-\left(\frac{1}{\eta}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta^{2k-1}}{4k^2-1}\right)\overline{\varphi'(\eta)}+\overline{\Psi(\eta)}=f_1+if_2. \tag{8}$$

Для определения из этого уравнения функции $\varphi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ применим аппарат интеграла типа Коши. Учитывая при этом свойства этого интеграла, находим

$$k_0\varphi(\zeta)+\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{\overline{\varphi'(\eta)}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\eta^{2k-1}}{4k^2-1}}{\eta-\zeta}d\eta+\overline{\Psi(0)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_1+if_2}{\eta-\zeta}d\eta. \tag{9}$$

Функции $\varphi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ в области единичного круга разлагаются в ряд

$$\varphi(\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\zeta^k, \quad \Psi(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\zeta^k. \tag{10}$$

Учитывая (10), из (9) получаем

$$k_0\sum_{k=1}^{\infty}a_k\zeta^k+\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\bar{a}_k\eta^{-k+1}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\eta^{2k-1}}{4k^2-1}}{\eta-\zeta}d\eta+\bar{b}_0=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\zeta^k, \tag{11}$$

где

$$A_k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(f_1+if_2)\eta^{-k-1}d\eta. \tag{12}$$

Далее, учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\bar{a}_k\eta^{-k+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta^{2k-1}}{4k^2-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\eta^{2n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k\bar{a}_{2k}}{4(k+n)^2-1}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\zeta^{2n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)\bar{a}_{2k-1}}{4(k+n-1)^2-1}+O\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

из (11) находим

$$k_0\sum_{n=1}^{\infty}a_n\zeta^n+2\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{2n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k\bar{a}_{2k}}{4(k+n)^2-1}+$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\zeta^{2n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)\bar{a}_{2k-1}}{4(k+n-1)^2-1}+\bar{b}_0=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\zeta^n.$$

Отсюда вытекает:

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k\bar{a}_{2k}}{4k^2-1}+\bar{b}_0=A_0, \tag{13}$$

$$k_0a_{2n-1}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)\bar{a}_{2k-1}}{4(k+n-1)^2-1}=A_{2n-1},\quad n=1,2,\ldots, \tag{14}$$

$$k_0a_{2n}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k\bar{a}_{2k}}{4(k+n)^2-1}=A_{2n},\quad n=1,2,\ldots. \tag{15}$$

Исследуем теперь вопрос о решимости бесконечных систем уравнений (14) и (15). При этом для простоты будем рассматривать случай симметричного нагружения полосы относительно оси x. Тогда $\bar{a}_n=a_n$.

Введя обозначения

$$X_{2n}=2na_{2n},\quad X_{2n-1}=(2n-1)a_{2n-1}, \tag{16}$$

уравнения (14) и (15) приведем к виду:

$$X_{2n}+\frac{4n}{k_0+\dfrac{4n}{16n^2-1}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{X_{2k}}{4(k+n)^2-1}=\frac{2nA_{2n}}{k_0+\dfrac{4n}{16n^2-1}}, \tag{17}$$

$$X_{2n-1}+\frac{2(2n-1)}{k_0+\dfrac{2(2n-1)}{(4n-1)(4n-3)}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{X_{2k-1}}{4(k+n-1)^2-1}=\frac{(2n-1)A_{2n-1}}{k_0+\dfrac{2(2n-1)}{(4n-1)(4n-3)}}. \tag{18}$$

Условиями вполне регулярности этих уравнений являются [3]:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{4n}{\left|k_0+\dfrac{4n}{16n^2-1}\right|}\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{1}{4(k+n)^2-1}<1,\\&\frac{2(2n-1)}{\left|k_0+\dfrac{2(2n-1)}{(4n-1)(4n-3)}\right|}\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{1}{4(k+n-1)^2-1}<1.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Если при $n\to\infty$ неравенства в (19) заменятся равенствами, то тогда (19) будут являться условиями регулярности.

Учитывая далее равенства $\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\dfrac{1}{4(k+n)^2-1}=\dfrac{1}{2(2n+1)}-\dfrac{1}{16n^2-1}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4(k+n-1)^2-1} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{(4n-1)(4n-3)},$$

условия (19) приводим к окончательному виду:

$$\frac{4n}{2(2n+1)} \, \frac{1-\dfrac{2(2n+1)}{16n^2-1}}{\left|k_0+\dfrac{4n}{16n^2-1}\right|}<1,$$

$$\frac{1-\dfrac{2(2n-1)}{(4n-1)(4n-3)}}{\left|k_0+\dfrac{2(2n-1)}{(4n-1)(4n-3)}\right|}<1. \tag{20}$$

Напомним, что: 1) $k_0=1$ соответствует случаям первой основной задачи плоской теории упругости и задачи изгиба заделанной по контуру пластинки; 2) $k_0=-(3-4\nu)$, где ν—коэффициент Пуассона, имеет место в случае плоского напряженного состояния, когда на контуре заданы смещения; 3) $k_0=-(3-\nu)/(1+\nu)$ соответствует случаю плоской деформации, когда на контуре заданы также смещения.

Легко проверить, что при указанных значениях k_0 условия (20) соблюдаются, при этом в первом случае (20) являются условиями регулярности, во втором случае при $0\leqslant\nu<0{,}5$ и в третьем случае при $0\leqslant\nu\leqslant0{,}5$ (20) являются условиями вполне регулярности. Если в случае регулярности уравнений (17) и (18) свободные члены будут иметь порядок не ниже $1/n$, а в случае вполне регулярности указанные члены ограничены в совокупности, то тогда уравнения (17) и (18) будут иметь решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений [3].

Этим завершается задача определения функции $\varphi(\zeta)$.

Полагая известной функцию $\varphi(\zeta)$, из (4) определяем функцию $\Psi(\zeta)$:

$$\Psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f_1-if_2}{\eta-\zeta}\,d\eta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\omega(\eta)}{\omega'(\eta)}\,\varphi'(\eta)\,\frac{d\eta}{\eta-\zeta}. \tag{21}$$

При этом согласно (2) и (5) $\dfrac{\overline{\omega(\eta)}}{\omega'(\eta)}=-\eta+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\eta^{-2k+1}}{4k^2-1}$.

Таким образом поставленная задача теоретически решена.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ թղթակից անդամ Օ. Մ. ՍԱՊՈՆՋՅԱՆ

Անվերջ շերտի համար բիհարմոնիկ պրոբլեմի մի լուծման մասին

Բիհարմոնիկ պրոբլեմ անվանումը վերաբերվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդրին և եզրագծով ամրակցված սալի դեպքին։ Անվերջ շերտի համար այդպիսի մի շարք խնդիրներ լուծվել են Ֆուրիեի ինտեգրալի

օգնությամբ։ Սակայն այդ մեթոդը կիրառելի չի լինում, երբ խնդրի եզրային պայմաններում մասնակցում են ֆունկցիաներ, որոնք եզրագծի անվերջ հեռու կետերում ձգտում են անսահմանության։ Ներկա հոդվածում մշակված է նոր եղանակ անվերջ շերտի վերաբերյալ խնդիրների լուծման համար, որը զերծ է այդ թերություններից։ Ընդհանուր ձևով խնդիրը լուծվում է կոնֆորմ արտապատկերման եղանակով։

Որոնելիք ֆունկցիաների (Թեյլորի շարքերի) գործակիցների համար ստացվել են անվերջ սիստեմի հավասարումներ, որոնք լրիվ ռեգուլյար են հարթ խնդրի դեպքում, երբ եզրային պայմանները տրված են լինում տեղափոխումների միջոցով, իսկ երբ այդ պայմանները տրված են լինում լարումների միջոցով, ինչպես նաև եզրագծով ամրակցված սալի դեպքում, այդ հավասարումները լինում են ռեգուլյար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *П. Ф. Папкович,* Теория упругости. Л.—М., 1939. [2] *Н. И. Мусхелишвили,* Изв. АН СССР. Механика, с. 374, 185, 1954. [3] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов.* Приближенные методы высшего анализа. ГИТТЛ, Л.—М., 1949.