ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXII 1986 4

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Г. А. Карагулян

О выделении подсистем безусловной сходимости из ортонормированных систем некоторого класса

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 25/X 1985)

Скажем, что система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на измеримом множестве $E\subset(0, 1)$, является системой сходимости, если все ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x) \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2<\infty\right) \tag{1}$$

сходятся почти всюду (п. в.). И соответственно системой безусловной сходимости, если они сходятся п. в. при любой перестановке членов.

Известен следующий результат, установленный Д. Е. Меньшовым и И. Марцинкевичем в 1936 г.

Теорема А([1,2]). *Для любой ортонормированной системы (ОНС) $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x\in(0, 1)$, существует ее подсистема сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$.*

В 1974 г. Комлош усилил этот результат, доказав, что из любой ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать подсистему безусловной сходимости (см. ([3])).

Вопрос о выделении подсистем сходимости с некоторыми свойствами плотности впервые был рассмотрен Б. С. Кашиным в ([4]). Им установлена следующая

Теорема Б ([4]). *Из любой ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить подсистему сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ с $n_k<R_k$, где $R_1=3$, $R_{k+1}=(R_k)!$ $(k=1, 2, \ldots)$.*

В той же работе Б. С. Кашиным был поставлен вопрос: можно ли в теореме Б оценку $n_k<R_k$ заменить на $n_k<k^{1+\varepsilon}(\varepsilon>0)$?

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x\in(0, 1)$, удовлетворяет условию $|\varphi_n(x)|<f(x)$, $n=1, 2, \ldots$, где $f(x)$ п. в. конечная измеримая функция. Тогда для любого $\delta>0$ из нее можно выделить подсистему безусловной сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ с условием $n_k<k^{4+\delta}(k=1, 2, \ldots)$*

Лемма 1. *Если $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ является ОНС на $(0, 1)$ и $f_1, f_2, \ldots, f_m$ некоторые функции из $L^2(0, 1)$ такие, что $\|f_i\|_2\leqslant M$, $i=1, 2, \ldots, m$, то найдется такой номер $k(1\leqslant k\leqslant n)$, что*

$$\sum_{l=1}^{m}\left|\int_0^1 \varphi_k f_l\right|^2 \leqslant M^2 \frac{m}{n}. \tag{2}$$

Доказательство. В силу ортонормированности $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ имеем $\sum_{k=1}^{n}\left|\int_0^1 \varphi_k f_i\right|^2 \leqslant \|f_i\|_2^2 \leqslant M^2$ для любого $i=1, 2, \ldots, m$. Отсюда следует

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\left|\int_0^1 \varphi_k f_l\right|^2\right)=\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\int_0^1 \varphi_k f_l\right|^2\right) \leqslant mM^2.$$

Тогда легко убедиться, что существует такое $1 \leqslant k \leqslant n$, чтобы выполнялось (2).

Лемма 1 доказана. Для доказательства следующей леммы используется метод Комлоша из работы ([5]).

Лемма 2. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ система некоторых функций, определенных на множестве $E \subset (0, 1)$ и удовлетворяющих условиям*

$$\int_E |\varphi_k(x)|^4 dx < C_1, \quad k=1, 2, \ldots \tag{3}$$

и
$$\sum_{1 \leqslant l_1 < l_2 < l_3 < l_4 < \infty}\left|\int_E \varphi_{l_1}\varphi_{l_2}\varphi_{l_3}\varphi_{l_4}\right|^2 < C_2, \tag{4}$$

где C_1 и C_2 некоторые постоянные. Тогда $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является системой безусловной сходимости на E.

Доказательство. Легко убедиться, что

$$\left(\sum_{l=1}^{n} a_l\varphi_l\right)^4 = \alpha_1 \sum_{1 \leqslant l_1 < l_2 < l_3 < l_4 \leqslant n} a_{l_1}a_{l_2}a_{l_3}a_{l_4}\varphi_{l_1}\varphi_{l_2}\varphi_{l_3}\varphi_{l_4} +$$
$$+\alpha_2\left(\sum_{l=1}^{n} a_l^2\varphi_l^2\right)^2 + \alpha_3 \sum_{l=1}^{n} a_l^4\varphi_l^4 + \alpha_4\left(\sum_{l=1}^{n} a_l^3\varphi_l^3\right)\left(\sum_{l=1}^{n} a_l\varphi_l\right) +$$
$$+\alpha_5\left(\sum_{l=1}^{n} a_l^2\varphi_l^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n} a_l\varphi_l\right)^2, \tag{5}$$

где α_k, $k=1, 2, \ldots, 5$ некоторые абсолютные постоянные. Обозначив через S_k $(1 \leqslant k \leqslant 5)$ множитель, стоящий перед α_k в (5), будем иметь

$$\int_E \left(\sum_{l=1}^{n} a_l\varphi_l\right)^4 = \sum_{k=1}^{5} \alpha_k \int_E S_k \leqslant \sum_{k=1}^{5} |\alpha_k| \max_{1 \leqslant k \leqslant 5}\left|\int_E S_k\right|. \tag{6}$$

Используя (4) и неравенства Гельдера, имеем

$$\left|\int_E S_1\right| \leqslant \sum_{1 \leqslant l_1 < l_2 < l_3 < l_4 \leqslant n} a_{l_1}^2 a_{l_2}^2 a_{l_3}^2 a_{l_4}^2 \sum_{1 \leqslant l_1 < l_2 < l_3 < l_4 \leqslant n}\left|\int_E \varphi_{l_1}\varphi_{l_2}\varphi_{l_3}\varphi_{l_4}\right|^2 \leqslant C_2\left(\sum_{l=1}^{n} a_l^2\right)^2.$$

Обозначив
$$S = \max_{1 \leqslant k \leqslant 5}\left|\int_E S_k\right|, \tag{7}$$

имеем (см. (6))

$$\int\limits_E \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i\right)^4 \leqslant \sum_{k=1}^{5} |\alpha_k| S. \tag{9}$$

Если S равно одному из чисел $\left|\int\limits_E S_2\right|$, $\left|\int\limits_E S_3\right|$, $\left|\int\limits_E S_4\right|$ и $\left|\int\limits_E S_5\right|$ (см. (8)) (очевидно, это зависит от чисел $\{a_i\}_{i=1}^{n}$), то, как установлено при доказательстве одной теоремы из работы ([5]),

$$\int\limits_E \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i\right)^4 \leqslant C_3 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2,$$

где C_3 некоторая постоянная, зависящая только от системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Если же $S = \left|\int\limits_E S_1\right|$, то аналогичное неравенство с константой $C_2 \sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|$ (см. (4)) следует из (7). В итоге получим (см. (9))

$$\int\limits_E \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i\right)^4 \leqslant C_4 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2 \quad \left(C_4 = \max\left\{C_3, C_2 \sum_{k=1}^{5} |\alpha_k|\right)\right\}.$$

Из последнего неравенства, дословно повторяя известную конструкцию Эрдёша (см. напр. ([6]), с. 322), можно убедиться, что $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является системой безусловной сходимости.

Тем самым лемма доказана.

Доказательство теоремы. Обозначая $E_n = \{x, n-1 \leqslant f(x) < n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, где $f(x)$ есть функция из теоремы, имеем

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 1, \; E_n \cap E_m = \varnothing \text{ при } n \neq m, \tag{10}$$

$$|\varphi_k(x)| < n \text{ при } k = 1, 2, \ldots \text{ и } x \in E_n \; (n = 1, 2, \ldots,). \tag{11}$$

По индукции определим номера n_k, $k = 1, 2, \ldots$, такие, чтобы выполнялись следующие условия

1) $n_{k-1} < n_k$, $k = 2, 3, \ldots$; (12)

2) $n_k < k^{4+\delta}$, $k = 1, 2, \ldots$; (13)

3) n_k есть наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию

$$\sum_{n=1}^{[k^{\delta/8}]} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant k-1} \left|\int\limits_{E_n} \varphi_{n_{i_1}} \varphi_{n_{i_2}} \varphi_{n_{i_3}} \varphi_{n_k}\right|^2 \leqslant \frac{1}{k^{1+\delta/8}} \quad (k > 3). \tag{14}$$

Определим $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ и $n_3 = 3$. Предположим, что уже определены номера n_k, $k = 1, 2, \ldots, p$ $(p \geqslant 3)$, удовлетворяющие условиям (12), (13) и (14). Применим лемму 1 к ОНС $\{\varphi_i\}_{i=1}^{[(p+1)^{4+\delta}]} \setminus \{\varphi_{n_j}\}_{j=1}^{p}$ и к функциям

$$\chi_{E_n} \cdot \varphi_{n_{i_1}} \varphi_{n_{i_2}} \varphi_{n_{i_3}}, \; n = 1, 2, \ldots, [(p+1)^{\delta/8}], \; 1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant p,$$

количество которых равно $[(p+1)^{\delta/8}] \cdot p(p-1)(p-2)/6$, и $L^2(0, 1)$ нормы которых ограничены числом $[(p+1)^{\delta/8}]$ (см. (11)). Тогда можно определить такое натуральное число t, что

$$t \in \{1, 2, \ldots, [(p+1)^{4+\delta}]\} \setminus \{n_1, n_2, \ldots, n_p\}, \tag{15}$$

$$\sum_{n=1}^{[(p+1)^{\delta/8}]} \sum_{1\le l_1<l_2<l_3\le p} \left|\int_{E_n} \varphi_{n_{l_1}}\varphi_{n_{l_2}}\varphi_{n_{l_3}}\varphi_t\right|^2 <$$

$$<[(p+1)^{\delta/8}]^4 \cdot \frac{[(p+1)^{\delta/8}]\cdot p(p-1)(p-2)}{6([(p+1)^{4+\delta}]-p)} \le \frac{1}{(p+1)^{1+\delta/8}}. \qquad (16)$$

Обозначим через n_{p+1} наименьшее из таких t. Тогда из (15) и (16) следуют, соответственно, условия (13) и (14) при $k=p+1$.

Для завершения индукции осталось показать, что $n_p<n_{p+1}$. Если предположить, что $n_p>n_{p+1}$, то в силу того, что по предположению индукции n_p есть наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию (14), имеем

$$\sum_{n=1}^{[p^{\delta/8}]} \sum_{1\le l_1<l_2<l_3<p-1} \left|\int_{E_n} \varphi_{n_{l_1}}\varphi_{n_{l_2}}\varphi_{n_{l_3}}\varphi_{n_{n+1}}\right|^2 > \frac{1}{p^{1+\delta/8}}$$

и тем более

$$\sum_{n=1}^{[(p+1)^{\delta/8}]} \sum_{1\le l_1<l_2<l_3\le p} \left|\int_{E_n} \varphi_{n_{l_1}}\varphi_{n_{l_2}}\varphi_{n_{l_3}}\varphi_{n_{n+1}}\right|^2 > \frac{1}{p^{1+\delta/8}} > \frac{1}{(p+1)^{1+\delta/8}}.$$

Это значит, что при $t=n_{p+1}<n_p$ (16) не выполняется. Следовательно $n_{p+1}>n_p$.

Итак, мы построили номера n_k, $k=1, 2, \ldots$ с условиями (12), (13) и (14).

Для завершения доказательства теоремы достаточно доказать, что $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является системой безусловной сходимости. Используя (14), легко убедиться, что

$$\sum_{1\le l_1<l_2<l_3<l_4<} \left|\int_{E_n} \varphi_{n_{l_1}}\varphi_{n_{l_2}}\varphi_{n_{l_3}}\varphi_{n_{l_4}}\right|^2 < \infty \qquad (17)$$

при любом $n=1, 2, \ldots$. На множестве E_n $L^4(E_n)$ нормы функций $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ограничены числом n. Тогда имея в виду (17), из леммы 2 получим, что $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является системой безусловной сходимости на (0, 1) (при любом $n\geq 1$). Тогда в силу (10) $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ является системой безусловной сходимости на (0, 1).

Теорема доказана.

Близкий к теореме 1 результат, формулировку которого нам сообщил Б. С. Кашин, получен Агаевым ([7]). Этот результат формулируется следующим образом.

Теорема В. *Если ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию*

$$\int_0^1 \left|\varphi_n(x)\right|^{4+\delta} dx < M, \quad n=1, 2, \ldots \quad (\delta>0),$$

то из нее можно выделить подсистему $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ с $n_k<k^{3+\varepsilon}$, являющуюся $S_{4+\delta}$-системой.

Автор благодарит чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляну за постоянное внимание к работе.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ա. ԿԱՐԱԳՈՒԼՅԱՆ

Որոշ դասի օրթոնորմավորված համակարգերից ոչ պայմանական զուգամիտության ենթահամակարգ ընտրելու մասին

Աշխատանքում դիտարկվում են $|\varphi_n(x)| < f(x)$, $n=1, 2, \ldots$ *պայմանին բավարարող* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *օրթոնորմավորված համակարգեր, որտեղ* $f(x)$ *համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի ֆունկցիա է։*

Այդ տիպի համակարգերի համար ապացուցվում է, որ գոյություն ունի նրա այնպիսի $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *ենթահամակարգ, որը ոչ պայմանական զուգամիտության սիստեմ է և որի համար* $n_k < k^{1+\delta}$, *որտեղ* $\delta > 0$ *նախապես տրված թիվ է։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *D. Menchoff*, Buul de la scc. Math. de France, 3—4, 64 (1936). [2] *J. Marcinkiewicz*, Studia Math., 6, 1936. [3] *J. Komlos*, Arciv for Math., 1, v. 12 (1974). [4] *Б. С. Кашин*, УМН, т. №2, 1985. [5] *J. Komlos*, Studia Sci. Math Hungar, 7, 1972. [6] *Б. С. Кашин, А. А. Саакян*, Ортогональные ряды, Наука, М., 1984. [7] *Agayev*, Analisis, Math, №4, 1985.