ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXII 1986 4

УДК 517.553

МАТЕМАТИКА

И. М. Геворкян, Ф. А. Шамоян

О слабой обратимости в пространствах аналитических в круге функций, допускающих рост вблизи его границы

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 14/II 1985)

1. Пусть D открытый единичный круг на комплексной плоскости C. И пусть $\mathscr{H}(D)$ пространство всех аналитических в D функций с топологией равномерной сходимости на внутренних компактах. Предположим, далее, что X—линейное подпространство пространства $\mathscr{H}(D)$, причем X удовлетворяет следующим двум условиям:

а) $zX\subset X$, б) $\mathscr{P}\subset X$, где $\mathscr{P}$—множество всех многочленов от z.

Функция $f\in X$, $f(z)\neq 0$, $z\in D$, называется слабо обратимой в пространстве X (см. [1]), если существует последовательность многочленов $\{p_n\}_1^\infty$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n f=1$, причем сходимость имеет место в топологии пространства X.

Понятие слабой обратимости возникло под влиянием работы М. В. Келдыша [2], в которой было установлено, что функция $s(z)=$ $=\exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)$ слабо необратима в пространстве

$$L_a^2(D)=\left\{f\in\mathscr{H}(D):\|f\|^2_{L_a^2(D)}=\int\limits_D|f(z)|^2dm_2(z)<+\infty\right\},$$

где $m_2(z)$ плоская мера Лебега.

Отметим также работу М. М. Джрбашяна [3], где наряду с другими результатами было установлено параметрическое представление тех функций g из $L_a^2(D)$, для которых возможна аппроксимация

$$\inf_{p\in\mathscr{P}}\|ps(z)-g\|_{L_a^2(D)}=0.$$

В работах А. Бёрлинга [4] и Н. К. Никольского [5] было установлено (при довольно жестких ограничениях на регулярность роста φ), что для слабой обратимости функции $s(z)$ в пространстве

$$L_a^2(\varphi)=\left\{f\in\mathscr{H}(D):\int\limits_D|f(z)|^2\exp\left\{-\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right\}dm_2(z)=\|f\|^2_{L_a^2(\varphi)}<+\infty\right\}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits^{+\infty}\left(\frac{\varphi(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}dx=+\infty.$

В первой части этой заметки мы решаем следующую задачу: пусть φ—монотонно растущая мажоранта на $(0,+\infty)$. При каких условиях на φ можно утверждать, что функция $s(z)$ слабо обратима в пространствах

$$A^p_\varphi=\left\{f\in\mathscr{H}(\mathrm{D}):\|f\|^p_{A^p_\varphi}=\int\limits_{\mathrm{D}}|f(z)|^p\exp\left\{-\varphi\left(\frac{1}{|1-z|}\right)\right\}dm_2(z)<+\infty\right\}.$$

Указанная задача возникает естественным образом, поскольку $s(z)$ голоморфна в $\mathrm{C}\setminus 1$, $s(z)\neq 0$, $z\in\mathrm{C}\setminus 1$ и довольно сильно стремится к нулю при приближении z к 1 по радиусу единичного круга. Оказывается справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть*

$$\varphi(x)=\int\limits_1^x\frac{\omega(t)}{t}dt,\quad \text{где}\quad \omega(t)>0,\ \omega(t)\uparrow+\infty,\ t\to+\infty. \tag{1}$$

Тогда:

1. *Следующие утверждения равносильны:*

а) *функция $s(z)$ слабо обратима в пространстве $A^{p_0}_\varphi$ при некотором $1\leqslant p_0<+\infty$;*

б) *$s(z)$ слабо обратима в A^p_φ при всех $1\leqslant p<+\infty$);*

в)
$$\int^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt=+\infty. \tag{2}$$

2. *Если выполняется* (2), *то каждая функция $f\in A^p_\varphi$ вида*

$$f(z)=Q(z)s^\beta(z),\quad z\in\mathrm{D},\quad \beta\geqslant 0, \tag{3}$$

где Q—внешняя функция, слабо обратима в пространстве A^p_φ, $1\leqslant p<+\infty$.

Имеет место аналог теоремы 1 и в равномерной метрике. Пусть φ —мажоранта из теоремы 1; положим

$$A_\varphi(\mathrm{D})=\left\{f\in\mathscr{H}(\mathrm{D}):f\in\mathrm{C}(\overline{\mathrm{D}}\setminus 1),\quad |f(z)|\exp\left|-\varphi\left(\frac{1}{|1-z|}\right)\right|\to 0,\right.$$
$$\left. z\to 1,\ \|f\|_{A_\varphi(\mathrm{D})}=\sup_{z\in\mathrm{D}}|f(z)|\exp\left\{-\varphi\left(\frac{1}{|1-z|}\right)\right\}\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть φ удовлетворяет условию* (1). *Тогда*

1. *Следующие два утверждения равносильны:*

а) *функция $s(z)$ слабо обратима в пространстве $A_\varphi(\mathrm{D})$;*

б)
$$\int^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt=+\infty.$$

2. *Если выполняется* б), *то каждая функция $f\in A_\varphi(\mathrm{D})$, $f(z)\neq 0$, $z\in\overline{\mathrm{D}}\setminus 1$ вида* (3) *слабо обратима в пространстве $A_\varphi(\mathrm{D})$.*

В дальнейшем X_φ будет обозначать одно из следующих пространств: A^p_φ, $1\leqslant p<+\infty$, $A_\varphi(\mathrm{D})$.

Следствие. Пусть $f\in C(\overline{D}\setminus 1)\cap X_\varphi$, $f(z)\neq 0$, $z\in\overline{D}\setminus 1$. Предположим, далее, что существует мажоранта ψ такая, что

$$|f(z)|\leqslant\exp\left\{c_f\psi\left(\frac{1}{|1-z|}\right)\right\},\quad z\in D.$$

При этом $\int^{+\infty}\frac{\psi(t)}{t^2}dt<+\infty$. Тогда функция f слабо обратима в пространстве X_φ, если φ удовлетворяет условию (2).

Теперь приведем результаты, относящиеся к функциям, допускающим более сильный рост при приближении к граничной точке, из которых следует, что условие (2) приходит к другому условию (см. ([4])).

Теорема 3. *Пусть* $s_\alpha(z)=\exp\left\{\frac{c}{(1-z)^\alpha}\right\}$, *где* c — *вещественное число, и пусть* $\varphi(r)=|c|r^\alpha+\psi(r^\alpha)$, ψ — *выпуклая функция. Тогда, если*

$$\alpha\geqslant 2 \text{ и } \int^{+\infty}\frac{\psi(t)}{t^{3/2}}dt=+\infty, \tag{4}$$

то $s_\alpha(z)$ *слабо обратима в пространстве* $A_\varphi(D)$, *если же* $\alpha\geqslant 4$, *то условие* (4) *является также необходимым для слабой обратимости функции* $s_\alpha(z)$ *в* $A_\varphi(D)$.

В заключение мы сформулируем одно утверждение, в котором участвуют мажоранты произвольного роста.

Пусть $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$ — монотонно растущие мажоранты на $(0,+\infty)$, причем $\varphi_1(r)\leqslant\varphi_2(r)$, $r\in(0,+\infty)$. Каким еще условиям должны удовлетворять φ_1 и φ_2, чтобы каждая функция $f\in A_{\varphi_1}(D)$, $f(z)\neq 0$, $z\in\overline{D}\setminus 1$, была слабо обратимой в пространстве $A_{\varphi_2}(D)$.

Аналогичная задача для других пространств голоморфных функций рассматривалась в работах ([5,6]).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi_1(x)=\int_1^x\frac{\omega(t)}{t}dt$ *удовлетворяет условиям* (1) *и предположим, что функция* $\frac{\varphi_2(\nu(e^r))}{\varphi_1(\nu(e^r))}$ *выпуклая, где* $\nu(t)$ — *обратная к функции* $\omega(t)$.

Тогда если

$$\int^{+\infty}\frac{\varphi_2(\nu(t))}{\varphi_1(\nu(t))}\frac{dt}{t^2}=+\infty,$$

то каждая функция $f\in\mathcal{H}(\overline{D}\setminus 1)\cap A_{\varphi_1}(D)$, $f(z)\neq 0$, $z\in\overline{D}\setminus 1$, *слабо обратима в пространстве* $A_{\varphi_2}(D)$.

Доказательство вышеуказанных теорем проводится по следующей схеме. Пусть f — одна из вышеуказанных функций и пусть $E(f)$ — замыкание множества $\mathcal{P}f$ в пространстве $X_\varphi(X_{\varphi_2})$. Предположим, что $\Phi\in X_\varphi^*$ — линейный непрерывный функционал, ортогональный к $E(f)$.

Поскольку $f(z)\neq 0$, $z\in D$, то можно рассмотреть функцию $e(t)=$

$=\Phi(f')$, где t изменяется в определенной области. Используя результаты М. М. Джрбашяна [7], легко доказать, что

$$e^{(n)}(1)=0, \quad n=1, 2, \ldots . \tag{5}$$

Теперь, исходя из условий вышеуказанных теорем, устанавливается, что функция $e(t)$ принадлежит классу квазианалитических функций. Поэтому из (5) вытекает, что $e(0)=0$, т. е. $1\in E(f)$.

Для установления необходимости приведенных условий используется специальный вид указанных функций.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ի. Մ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ, Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ

Շրջանում անալիտիկ և նրա եզրի մոտ աճ թույլատրող ֆունկցիաների տարածություններում թույլ հակադարձելիության մասին

Դիցուք φ-ն մոնոտոն աճող ֆունկցիա է $[0, +\infty)$ *կիսաառանցքի վրա* $(\varphi(x)>0)$։ *Նշանակենք* $A^p_\varphi(1\leqslant p<+\infty)$ *շրջանում անալիտիկ այն* f *ֆունկցիաների տարածությունը, որոնց համար*

$$\|f\|^p_{A^p_\varphi}=\int\limits_D |f(z)|^p e^{-\varphi\left(\frac{1}{|1-z|}\right)} dm_2(z)<\infty,$$

որտեղ՝ $m_2(z)$*-ը Լեբեգի մակերեսային չափն է* D*-միավոր շրջանում։*

Հոդվածում ստացված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ φ-մաժորանտի վրա, որոնց դեպքում

$$s_\alpha(z)=\exp\left\{\frac{c}{(1-z)^\alpha}\right\}, \quad (z\in D)$$

ֆունկցիաների տիպի ֆունկցիաները հանդիսանում են թույլ հակադարձելի $A^p_\varphi-(1\leqslant p<+\infty)$ *տարածություններում։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. S. Shapiro*, Mich. Math. Jonrnal, v. 11, p. 161—165 (1964). [2] *М. В. Келдыш*, Мат. сб., т. 16 (58), с. 1—20 (1945). [3] *М. М. Джрбашян*, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 12, с. 555—568 (1948). [4] *A. Beurling*, Acta Math., v. 112, № 3—4 (1964). [5] *Н. К. Никольский*, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 120 (1974). [6] *Ф. А. Шамоян*, ДАН. АрмССР, т. 74, № 3 (1982). [7] *М. М. Джрбашян*, Мат. сб. т. 36 78), № 3 (1955).