ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXII 1986 4

УДК 517.984

МАТЕМАТИКА

Л. В. Микаелян

Асимптотика детерминантов усеченных операторов Винера—Хопфа в некотором сингулярном случае

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 8/II 1985)

Пусть $D_n(\mu)$—теплицевый детерминант, образованный коэффициентами Фурье функции

$$\mu(\theta)=\mu_1(\theta)\prod_{k=1}^{n}|e^{i\theta}-e^{i\theta_k}|^{2\alpha_k}\quad(\mu_1(\theta)\neq 0\ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)).$$

В [1] А. Ленардом была выдвинута гипотеза, что в этом сингулярном случае верна асимптотическая формула

$$D_n(\mu)\sim C(\mu)n^{\sum\alpha_k^2}[G(\mu)]^{n+1}\quad(n\to\infty),$$

где $C(\mu)$ некоторая постоянная, а $G(\mu)$—среднее геометрическое функции $\mu(\theta)$. Верность этой гипотезы доказана для $\alpha_k>-1/2$ Х. Уидомом в [2] и распространена на более широкий класс показателей α_k Е. Бейсор [3]. В обеих работах найдена также постоянная $C(\mu)$.

В недавней совместной работе [4] Х. Уидома и Е. Бейсор рассмотрен другой сингулярный случай, когда $\mu(\theta)$ имеет конечное число точек разрыва, и найден континуальный аналог этого случая. В этой работе, в частности, сказано, что исследования работ [2,3], наверно, имеют свои континуальные аналоги, но сложная техника этих работ и отсутствие простых случаев, когда детерминант Фредгольма соответствующего интегрального оператора можно точно подсчитать, делают нахождение этих аналогов сложным. Настоящая заметка посвящена исследованию некоторых простых случаев и установлению одного неравенства в более общем случае, которое является аналогом результата А. Ленарда из работы [1].

1. Обозначим через R Винеровскую алгебру, т. е. алгебру функций, допускающих представление

$$f(\lambda)=f(\infty)+\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)e^{i\lambda t}dt,$$

где $f(\infty)$—постоянная, а $\hat{f}(t)\in L_1(-\infty,\infty)$. Если в этом представлении $\hat{f}(t)=0$ при $t<0$ $(t>0)$, то скажем, что $f(\lambda)\in R^+(R^-)$. Скажем, что $\sigma(\lambda)\in R$ допускает каноническую факторизацию, если $\sigma(\lambda)=\sigma_+(\lambda)\sigma_-(\lambda)$, где $\sigma_+, \sigma_+^{-1} \in R^+$ и $\sigma_-, \sigma_-^{-1} \in R^-$. Пусть P_r проектор из $L_2(0, \infty)$ на $L_2(0, r)$ и $(Q_r f)(t) = (P_r f)(r-t)$. Для

$$\sigma(\lambda) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\sigma}(t) e^{i\lambda t} dt \in R$$

обозначим через $\tilde{\sigma}(\lambda) = \sigma(-\lambda)$, а через $T(\sigma)$ и $H(\sigma)$ операторы, действующие в $L_2(0, \infty)$ по формулам

$$(T(\sigma)f)(t) = f(t) + \int_0^{\infty} \hat{\sigma}(t-s) f(s) ds, \quad (H(\sigma)f)(t) = \int_0^{\infty} \hat{\sigma}(t+s) f(s) ds.$$

Пусть $T_r(\sigma) = P_r T(\sigma) P_r$, которую мы будем рассматривать в $L_2(0, r)$. Обозначим через $D_r(\sigma)$ детерминант Фредгольма оператора $T_r(\sigma)$. Континуальным аналогом теоремы Г. Сегё о теплицевых детерминантах принято называть следующее асимптотическое соотношение:

$$D_r(\sigma) \sim [G(\sigma)]^r E(\sigma) \quad (r \to \infty), \tag{1}$$

где $G(\sigma) := \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log \sigma(\lambda) d\lambda\right\}$, $E(\sigma) := \exp\left\{\int_0^{\infty} t (\log \sigma)\hat{}\,(t) (\log \sigma)\hat{}\,(-t) dt\right\}$,

$$\log \sigma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (\log \sigma)\hat{}\,(t) e^{i\lambda t} dt.$$

Нам понадобится еще следующее равенство (см. ([5])):

$$T_r(\tau_1 \tau_2) = T_r(\tau_1) T_r(\tau_2) + P_r H(\tau_1) H(\tilde{\tau}_2) P_r + Q_r H(\tilde{\tau}_1) H(\tau_2) Q_r, \tag{2}$$

являющееся аналогом соответствующего равенства для теплицевых операторов, впервые обнаруженного Х. Уидомом.

Скажем, что $\sigma(\lambda)$ несингулярная, если для $\sigma(\lambda)$ верно соотношение (1).

2. Имеет место следующее

Предложение 1. Операторы $T_r(\sigma_a)$ $(0 < r < \infty)$ с символом

$$\sigma_a(\lambda) = |\sigma_a^+(\lambda)|^2 := \left|\frac{\lambda - a}{\lambda - a + i}\right|^2 = 1 - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iat} e^{-|t|} e^{i\lambda t} dt \quad (\operatorname{Im} a = 0)$$

обратимы в пространствах $L_2(0, r)$ и

$$([T_r(\sigma_a)]^{-1} f)(t) = f(t) - \int_0^r \Gamma_r^a(t, s) f(s) ds, \text{ где}$$

$$\Gamma_r^a(t, s) = e^{-iat} \left[\frac{(1+t)(1+s)}{r+2} - 1 - \min\{t, s\}\right] e^{ias}.$$

Пусть $[T_r(\sigma)]^{-1} := T_r^{-1}(\sigma) = I - \Gamma_r(\sigma)$ и $\Gamma_r(t, s, \sigma)$ ядро оператора $\Gamma_r(\sigma)$, тогда, как показал Н. И. Ахиезер ([6]), имеет место равенство

$$D_r(\sigma)=\exp\left\{\int_0^r \Gamma_t(t,\,t,\,\sigma)dt.\right.$$

Отсюда и из предложения 1 сразу следует

Предложение 2. $D_r(\sigma_a)=e^{-r}(1+r/2)$.

Пусть $\sigma(\lambda)=\sigma_a(\lambda)\tau(\lambda)=\sigma_a(\lambda)\left(1+\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\tau}(t)e^{i\lambda t}dt\right)$, тогда из равенства (2) получим

$$T_r(\sigma)=T_r(\tau)T_r(\sigma_a)-1/2(\,\cdot\,,P_r\varphi_1)P_r\psi_1-1/2(\,\cdot\,,Q_r\varphi_2)Q_r\psi_2, \tag{3}$$

где

$$\varphi_1(t)=e^{-t}e^{-iat},\quad \varphi_2(t)=e^{-t}e^{iat}, \tag{4}$$

$$\psi_1(t)=\int_0^{\infty}\hat{\tau}(t+s)e^{ias}e^{-s}ds,\quad \psi_2(t)=\int_0^{\infty}\hat{\tau}(-t-s)e^{-ias}e^{-s}ds.$$

Здесь $(\,\cdot\,,)$ скалярное произведение в $L_2(0,\infty)$.

Теорема 1. *Если $\sigma(\lambda)=\sigma_a(\lambda)\tau(\lambda)$, $\tau(\lambda)$ допускает каноническую факторизацию $\tau(\lambda)=\tau_+(\lambda)\tau_-(\lambda)$, то*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{D_r(\sigma)}{D_r(\sigma_a)D_r(\tau)}=\frac{\tau_+(a+i)\tau_-(a-i)}{\tau(a)}.$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что операторы $T_r(\tau)$ обратимы в пространствах $L_p(0,r)(p\geqslant 1)$ начиная с некоторого $r\geqslant r_0$ и $T_r^{-1}(\tau)\to T^{-1}(\tau)$ в сильном смысле (см. [7]). Из представления (3) и предложения 1 следует

$$\frac{D_r(\sigma)}{D_r(\sigma_a)D_r(\tau)}=\det\begin{Vmatrix}1-a_{11}(r,\tau) & -a_{12}(r,\tau)\\ -a_{21}(r,\tau) & 1-a_{22}(r,\tau)\end{Vmatrix}, \tag{5}$$

где

$$a_{11}(r,\tau)=\frac{1}{2}(T_r^{-1}(\tau)\psi_1,\ T_r^{-1}(\sigma_a)\varphi_1)=\int_0^r\frac{1+r-t}{r+2}e^{iat}(T_r^{-1}(\tau)\psi_1)(t)dt,$$

$$a_{12}(r,\tau)=\frac{1}{2}(T_r^{-1}(\tau)\psi_1,\ T_r^{-1}(\sigma_a)Q_r\varphi_2)=e^{-iar}\int_0^r e^{iat}\,\frac{t+1}{r+2}\,(T_r^{-1}(\tau)\psi_1)(t)dt,$$

$$a_{21}(r,\tau)=\frac{1}{2}(T_r^{-1}(\tilde{\tau})\psi_2,\ T_r^{-1}(\tilde{\sigma}_a)Q_r\varphi_1)=e^{iar}\int_0^r e^{-iat}\frac{t+1}{r+2}(T_r^{-1}(\tilde{\tau})\psi_2)(t)dt,$$

$$a_{22}(r,\tau)=\frac{1}{2}(T_r^{-1}(\tilde{\tau})\psi_2,\ T_r^{-1}(\tilde{\sigma}_a)\varphi_2)=\int_0^r\frac{1+r-t}{r+2}e^{-iat}(T_r^{-1}(\tilde{\tau})\psi_2)(t)dt.$$

После несложного подсчета получим $\lim\limits_{r\to\infty}a_{12}(r,\tau)=\lim\limits_{r\to\infty}a_{21}(r,\tau)=0$,

$$\lim_{r\to\infty}a_{11}(r,\tau)=\frac{\tau_+(a)-\tau_+(a+i)}{\tau_+(a)},\qquad \lim_{r\to\infty}a_{22}(r,\tau)=\frac{\tau_-(a)-\tau_-(a-i)}{\tau_-(a)}.$$

Следствие. При условиях теоремы 1, если $\tau(\lambda)$ несингулярная, то

$$D_r(\sigma)\sim\left(1+\frac{r}{2}\right)[G(\sigma)]^r E(\tau)\frac{\tau_+(a+i)\tau_-(a-i)}{\tau(a)}\quad(r\to\infty).$$

Доказательство очевидно, если учитывать предложение 2 и то, что $G(\sigma)=G(\sigma_a)G(\tau)$, $G(\sigma_a)=e^{-1}$.

Подставляя в равенство (5) вместо $\tau(\lambda)=\sigma_b(\lambda)$ $b\neq a$ и $\tau(\lambda)=\sigma_a(\lambda)$, можно получить следующие предложения.

Предложение 3. Справедливо предельное соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\frac{D_r(\sigma_a\sigma_b)}{D_r(\sigma_a)D_r(\sigma_b)}=\left|\frac{\sigma_b^+(a+i)}{\sigma_b^+(a)}\right|^2.$$

Предложение 4. При $r\to\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$D_r(\sigma_a^2)\sim 1/12[G(\sigma_a)]^r\left(\frac{r}{2}\right)^4.$$

Предложение 3 показывает, что условие $\tau(\lambda)\neq 0$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ не является необходимым в теореме 1, но $\tau(a)\neq 0$ необходимо, что видно из предложения 4.

3. Рассмотрим более общий случай. Пусть

$$\sigma(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}[\sigma_{a_j}(\lambda)]^{\alpha_j}\tau(\lambda),\ (\operatorname{Im}a_j=0,\ \alpha_j>0\ (j=1,2,\ldots,n))\tag{6}$$

$\tau(\lambda)\in R$, $\tau(\lambda)>0(-\infty<\lambda<\infty)$, $\tau(\lambda)$ несингулярная. Для $0<\varepsilon<1/2$ обозначим через

$$\sigma_\varepsilon(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}[\sigma_{a_j}(\lambda+i\varepsilon)]^{\alpha_j}\tau(\lambda).$$

Очевидно, что при $\operatorname{Im}\lambda=0$ $\sigma_\varepsilon(\lambda)>\sigma(\lambda)$, откуда следует, что самосопряженные операторы $T_r(\sigma_\varepsilon)$ и $T_r(\sigma)$ удовлетворяют неравенству $T_r(\sigma)<T_r(\sigma_\varepsilon)$, что в свою очередь приведет к соотношению $D_r(\sigma)<D_r(\sigma_\varepsilon)$. Следовательно,

$$D_r(\sigma)<[G(\sigma_\varepsilon)]^r\frac{D_r(\sigma_\varepsilon)}{[G(\sigma_\varepsilon)]^r}\leqslant G^r(\sigma_\varepsilon)\frac{D_{r+t}(\sigma_\varepsilon)}{G^{r+t}(\sigma_\varepsilon)}$$

для любого $t>0$, так как в этом случае отношение D_r/G^r монотонно неубывающее. Переходя к пределу при $t\to\infty$ и учитывая несингулярность $\sigma_\varepsilon(\lambda)$, получим

$$D_r(\sigma)<G^r(\sigma_\varepsilon)E(\sigma_\varepsilon).$$

Проведя соответствующие вычисления и оценивая правую часть этого неравенства подходящим образом, можно получить оценку

$$D_r(\sigma)<G^r(\tau)e^{-\sum\alpha_j r}e^{2\varepsilon r}\prod_{j=1}^{n}\left|\frac{\tau_+(a_j-(1-\varepsilon)i)}{\tau_+(a_j+i\varepsilon)}\right|^{2\alpha_j}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{4(1-\varepsilon)\varepsilon}\right)^{\sum\alpha_j^2}\prod_{l<j}\left|\frac{\sigma_{a_l}^+(a_j+i)}{\sigma_{a_l}^+(a_j)}\right|^{2\alpha_l\alpha_j}\left(\frac{1}{1-2\varepsilon}\right)^{\sum\limits_{l<j}\alpha_l\alpha_j}.$$

Подставляя в это неравенство вместо ε определенное значение, можно утверждать, что справедлива

Теорема 2. *Если $\sigma(\lambda)$ допускает представление* (6), *где $\tau(\lambda)\in R$, $\tau(\lambda)>0$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ и $\tau(\lambda)$ несингулярная, то верно неравенство*

$$D_r(\sigma)<C[G(\sigma)]^r\left(1+\frac{r}{2}\right)^{\Sigma\alpha_j},$$

где C — некоторая постоянная, зависящая от τ, a_l, α_l $(l=1,\ldots,n)$.

Эта теорема является континуальным аналогом теоремы А. Ленарда из работы ([1]). Соответственную гипотезу можно сформулировать так.

Гипотеза. Если $\sigma(\lambda)$ допускает представление (6), где $\tau(\lambda)$ несингулярная, и допускает каноническую факторизацию $\tau(\lambda)=\tau_+(\lambda)\tau_-(\lambda)$, то

$$D_r(\sigma)\sim C[G(\sigma)]^r\, r^{\Sigma\alpha_j}\quad (r\to\infty).$$

Для постоянной C можно указать следующий вид:

$$C=c\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\tau_+(a_j+i)\tau_-(a_j-i)}{\tau(a_j)}\right)^{\alpha_j}\prod_{l<j}\left|\frac{\sigma_{a_l}(a_j+i)}{\sigma_{a_l}(a_j)}\right|^{2\alpha_l\alpha_j},$$

где c зависит только от $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Институт математики Академии наук Армянской ССР

Լ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Վիներ—Հոպֆի հատված օպերատորների դետերմինանտների ասիմպտոտիկան մի սինգուլյար դեպքում

Հոդվածում ուսումնասիրված է Վիներ—Հոպֆի հատված օպերատորի Ֆրեդհոլմի դետերմինանտի ասիմպտոտիկ վարքը, երբ այդ օպերատորի սիմվոլն ունի որոշակի տեսքի զրո իրական առանցքի որևէ կետում։ Ստացված է գնահատական վերևից այդ դետերմինանտի համար, երբ սիմվոլն ունի վերջավոր թվով զրոներ կամայական պատիկություններով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *A. Lenard*, Pacific J. of math., v. 42, № 1 (1972). [2] *H. Widom*, Amer. J. of math., v. 95, № 2 (1973). [3] *E. Basor*, Trans. of Amer. math. soc., v. 239, p. 33—65 (1978). [4] *E. Basor, H. Widom*, J. of func. anal., v. 50 № 3 (1983). [5] *Л. В. Микаелян*, ДАН Арм. ССР, т. 68, № 3 (1979). [6] *Н. И. Ахиезер*, Укр. мат. журн., т. 16, № 4 (1964). [7] *И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман*, Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, Наука, М., 1973.