

УДК 517.548

МАТЕМАТИКА

В. М. Мартиросян, К. Р. Овссян

К теории α -квазианалитических классов М. М. Джрбашяна в угловых областях

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 20/XI 1984)

1 (а). Как хорошо известно, полное решение проблемы Ж. Адама-
ра о квазианалитических классах дается теоремой Данжуа—Карле-
мана (¹⁻⁵). М. М. Джрбашяном (⁶) была поставлена проблема рас-
ширения понятия квазианалитичности, сводящаяся при $\gamma=1$ к класси-
ческой проблеме Ж. Адамара и заключающаяся в следующем.

Пусть $\{M_n\}_1^\infty$ — последовательность положительных чисел и $T(r) =$
 $= \sup\{r^n/M_n : n \geq 1\}$. Для заданного значения $\gamma > 0$ какими должны быть
подклассы $C_\gamma\{M_n\} \subset C\{M_n\}$ на данном промежутке $J \subset (-\infty, +\infty)$ и
простейшие функционалы $L_n^\gamma f (n=0, 1, \dots)$, чтобы лишь при условии

$$\int \frac{\ln T(r)}{r^{1+\gamma}} dr = +\infty \quad (1)$$

для любой функции $f \in C_\gamma\{M_n\}$ из равенств

$$L_n^\gamma f = 0 \quad (n=0, 1, \dots) \quad (2)$$

следовало тождество $f(x) \equiv 0, x \in J$?

В исследованиях М. М. Джрбашяна (⁶⁻⁸) был открыт метод, поз-
воливший дать полное решение этой проблемы.

После введения более удобного параметра $\alpha = (1-\gamma)/(1+\gamma)$ ($-1 <$
 $< \alpha < 1$) соответствующие классы единственности были названы α -ква-
зианалитическими.

(б). В работе М. М. Джрбашяна и Г. С. Кочаряна (¹⁰) была
рассмотрена задача, аналогичная проблеме (1)—(2), для определен-
ных классов функций, аналитических в угловых областях вида $\Delta_\gamma =$
 $= \{z : |\text{Arg} z| < \pi/(2\gamma)\} (\gamma > 0)$, лежащих на римановой поверхности G_∞
функции $\text{Ln} z$.

Для значений параметров $0 \leq \alpha < 1$ и $\gamma > 0$ в работе (¹⁰) были
введены классы $C_\alpha^{(\gamma)}\{\Delta_\gamma\}$ функций f , голоморфных в Δ_γ и таких, что
 $\forall \gamma_1 > \gamma$

$$\sup_{\Delta_{\gamma_1}} \{(1+|z|^m)|f^{(n)}(z)|\} < +\infty \quad (n, m=0, 1, \dots), \quad (3)$$

а также их следующие подклассы:

1) $C_\alpha\{\Delta_\gamma; M_n\}$ функций $f \in C_\alpha^{(\gamma)}\{\Delta_\gamma\}$, для которых

$$\sup_{\Delta_\gamma} \{(1+|z|^\gamma) |f^{(n)}(z)|\} \leq AB^n M_n \quad (n=1, 2, \dots); \quad (4)$$

2) $C_\alpha^* \{\Delta_\gamma; M_n\}$ функций $f \in C_\alpha^{(\infty)} \{\Delta_\gamma\}$, для которых

$$\sup_{\Delta_\gamma} |D_\infty^{n/\rho} f(z)| \leq AB^n M_n \quad (n=1, 2, \dots), \quad 1/\rho = 1-\alpha, \quad (5)$$

где константы $A=A(f)>0$, $B=B(f)>0$ не зависят от n .

При этом ⁽¹⁰⁾ для функций $f \in C_\alpha^{(\infty)} \{\Delta_\gamma\}$, если $0 \leq \alpha < 1$, то

$$\begin{aligned} D_\infty^{0/\rho} f(z) &\equiv f(z), \quad D_\infty^{n/\rho} f(z) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_z^{\alpha(e^{i \operatorname{Arg} z})} (\zeta - z)^{\alpha n - 1} f^{(n)}(\zeta) d\zeta \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (6)$$

В работе ⁽¹⁰⁾ единственность функций связывалась со значениями функционалов

$$D_\infty^{n/\rho} f(0 \cdot e^{i\theta}) = \frac{e^{i\alpha n \theta}}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} f^{(n)}(re^{i\theta}) r^{\alpha n - 1} \left(|\theta| < \frac{\pi}{2\gamma}, n \geq 0 \right) \quad (7)$$

и были установлены следующие теоремы.

Теорема А. 1°. Для того чтобы класс $C_\alpha \{\Delta_\gamma; M_n\}$ ($0 \leq \alpha < 1$, $\gamma > 0$) обладал свойством $(\alpha; \gamma)$ -единственности, т. е. чтобы для любой функции $f \in C_\alpha \{\Delta_\gamma; M_n\}$ из равенств

$$D_\infty^{n/\rho} f(0 \cdot e^{i\theta}) = 0 \quad \left(|\theta| < \frac{\pi}{2\gamma}; n=0, 1, \dots \right) \quad (8)$$

следовало тождество $f(z) \equiv 0$, $z \in \Delta_\gamma$, достаточно условие

$$\int_0^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+(1-\alpha)\gamma}} dr = +\infty, \quad \alpha = \left\{ 1 + \alpha + \frac{1-\alpha}{\gamma} \right\}^{-1}. \quad (9)$$

2°. Если интеграл (9) сходится, то существует нетривиальная функция $f \in C_\alpha^{(\infty)} \{\Delta_\gamma\}$, удовлетворяющая условиям (8) и такая, что

$$\sup_{\Delta_\gamma} |f^{(n)}(z)| \leq AB^n M_n \quad (n=1, 2, \dots). \quad (10)$$

Теорема Б. Для того чтобы класс $C_\alpha^* \{\Delta_\gamma; M_n\}$ ($0 \leq \alpha < 1$, $\gamma > 0$) обладал свойством $(\alpha; \gamma)$ -единственности, необходимо и достаточно условие

$$\int_0^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\gamma}} dr = +\infty. \quad (11)$$

Отметим, что при $\alpha=0$ обе эти теоремы переходят в следующую теорему Р. Б. Салинаса ⁽¹¹⁾.

Теорема В. 1°. Пусть $f(z)$ ограничена и аналитична в Δ_γ , удовлетворяет условиям (10) и

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Тогда $f(z) \equiv 0$, $z \in \Delta_\gamma$, если

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{1+\gamma/(1+\gamma)}} dr = +\infty. \quad (13)$$

2°. Обратно, если интеграл (13) конечен, то существует ограниченная и аналитическая в Δ_γ функция $f(z) \neq 0$, удовлетворяющая условиям (10) и (12).

2(a). Отметим теперь, что без всякого изменения всего метода решения проблемы в целом, предложенного в исследовании М. М. Джрбашяна (6) и примененного в дальнейшем в работах (10, 12, 13), можно предельно расширить ранее введенные классы $C_\alpha\{\Delta_\gamma; M_n\}$ и $C_\alpha^*\{\Delta_\gamma; M_n\}$ ($0 \leq \alpha < 1$, $\gamma > 0$) с тем, чтобы они были непосредственно ассоциированы с функционалами единственности (7). В предлагаемой работе мы формулируем критерии $(\alpha; \gamma)$ -единственности соответствующих классов и полученные результаты распространяем также на значения параметра $-1 < \alpha < 0$. При этом устраняется также расхождение между необходимой и достаточной частями теоремы А.

(б). Пусть $-1 < \alpha < 1$ и $1/p = 1 - \alpha$. Для значений $0 \leq \alpha < 1$ определим операторы $D_\alpha^{n/p}$ по формулам (6), а если $-1 < \alpha < 0$ и $n \geq 1$, положим

$$D_\alpha^{n/p} f(z) = \frac{1}{\Gamma[(1+\alpha)n]} \int_z^{\alpha(e^{i \operatorname{Arg} z})} (\zeta - z)^{(1+\alpha)n-1} f^{(2n)}(\zeta) d\zeta. \quad (14)$$

Очевидно, что при $-1 < \alpha < 0$, $n \geq 1$ и $|\vartheta| < \pi/(2\gamma)$

$$D_\alpha^{n/p} f(0 \cdot e^{i\vartheta}) = \frac{e^{i\ell(1+\alpha)n\vartheta}}{\Gamma[(1+\alpha)n]} \int_0^\infty f^{(2n)}(re^{i\vartheta}) r^{(1+\alpha)n-1} dr. \quad (15)$$

Обозначим через $\tilde{C}_\alpha^{(*)}\{\Delta_\gamma\}$ ($-1 < \alpha < 1$, $\gamma > 0$) класс ограниченных и аналитических в Δ_γ функций $f(z)$, для которых интегралы (7) или (15) абсолютно сходятся (соответственно при $0 < \alpha < 1$ и $-1 < \alpha < 0$).

Через $\tilde{C}_\alpha\{\Delta_\gamma; M_n\}$ ($-1 < \alpha < 1$, $\gamma > 0$) обозначим класс функций $f \in \tilde{C}_\alpha^{(*)}\{\Delta_\gamma\}$, для которых выполняются условия (10).

Теорема 1. Для того чтобы класс $\tilde{C}_\alpha\{\Delta_\gamma; M_n\}$ ($-1 < \alpha < 1$, $\gamma > 0$) обладал свойством $(\alpha; \gamma)$ -единственности, т. е. чтобы для любой функции $f \in \tilde{C}_\alpha\{\Delta_\gamma; M_n\}$ из равенств

$$D_\alpha^{n/p} f(0 \cdot e^{i\vartheta}) = 0 \quad \left(|\vartheta| < \frac{\pi}{2\gamma}; n = 0, 1, 2, \dots \right) \quad (16)$$

вытекало тождество $f(z) \equiv 0$, $z \in \Delta_\gamma$, необходимо и достаточно условие (9).

Теперь обозначим через $\tilde{C}_\alpha^{*(*)}\{\Delta_\gamma\}$ ($-1 < \alpha < 1$, $\alpha \neq 0$, $\gamma > 0$) класс функций $f(z) \in \tilde{C}_\alpha^{(*)}\{\Delta_\gamma\}$ таких, что:

1) если $0 < \alpha < 1$, то $\forall \vartheta_0$ ($0 < \vartheta_0 < \pi/(2\gamma)$)

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R^{\alpha n}} \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} |f^{(n)}(Re^{i\vartheta})| d\vartheta = 0; \quad (17)$$

2) если $-1 < \alpha < 0$, то $\forall \theta_0$ ($0 < \theta_0 < \pi/(2\gamma)$)

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R^{(1+\alpha)n} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} |f^{(2n)}(Re^{i\theta})| d\theta = 0. \quad (18)$$

При $\alpha=0$ полагаем $\tilde{C}_0^{(\alpha)}\{\Delta_\gamma\} = \tilde{C}_0^{(0)}\{\Delta_\gamma\}$, т. е. $\tilde{C}_0^{(\alpha)}\{\Delta_\gamma\}$ — это класс ограниченных и аналитических в Δ_γ функций.

Наконец, обозначим через $\tilde{C}_\alpha^{(\gamma)}\{\Delta_\gamma; M_n\}$ ($-1 < \alpha < 1$, $\gamma > 0$) класс функций $f \in \tilde{C}_\alpha^{(\gamma)}\{\Delta_\gamma\}$, удовлетворяющих условиям (5).

Теорема 2. Для того чтобы класс $\tilde{C}_\alpha^{(\gamma)}\{\Delta_\gamma; M_n\}$ ($-1 < \alpha < 1$, $\gamma > 0$) обладал свойством $(\alpha; \gamma)$ -единственности, необходимо и достаточно условие (11).

Авторы искренне признательны академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и ценные указания.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, Վ. Ռ. ՀՈՎԵՍՅԱՆ

Անկյունային տիրույթներում Մ. Մ. Ջրբաշյանի α -փազիանալիտիկ դասերի վերաբերյալ

Տվյալ հոդվածում մենք ցույց ենք տալիս, որ չփոխելով ինդքսի մեթոդը ամբողջությամբ, որն առաջարկվել էր ⁽⁸⁾ հետազոտությունում, կարելի է հնարավորին չափ ընդլայնել ⁽¹⁰⁾-ում ներմուծված $C_\alpha\{\Delta_\gamma; M_n\}$ և $\tilde{C}_\alpha^{(\gamma)}\{\Delta_\gamma; M_n\}$ ($0 \leq \alpha < 1$, $0 < \gamma < +\infty$) դասերն ափսոս, որ նրանք անմիջականորեն կապվեն միակութիան ⁽⁷⁾ ֆունկցիոնալների հետ: Ծույց ենք տալիս, որ ⁽⁹⁾ և ⁽¹¹⁾ պայմանները համապատասխան դասերի $(\alpha; \gamma)$ -միակութիան հալսանիշներ են, և ստացված արդյունքները տարածում ենք նաև $-1 < \alpha < 0$ դեպքում:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ J. Hadamard, C. R. Seances Soc. Math. France, v. 40 p. 28—29 (1912). ² A. Denjoy, C. R. Acad. Sc., Paris, v. 173 p. 1329—1331 (1921). ³ T. Carleman, Les fonctions quasi analytiques, Gauthier-Villars, Paris, 1926. ⁴ A. Ostrowski, Acta Math., v. 53, p. 181—266 (1930). ⁵ С. Мандельбродт, Примаыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, ИЛ, М., 1955. ⁶ М. М. Джрбашян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 3, № 3 (1968); Amer. Math. Soc. Transl., (2), v. 110 (1977). ⁷ М. М. Джрбашян, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 18, с. 427—448 (1954). ⁸ М. М. Джрбашян, ДАН СССР, т. 95, с. 1133—1136 (1954); Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 19, № 1 (1955). ⁹ М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. ¹⁰ М. М. Джрбашян, Г. С. Кочарян, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 37, № 1 (1973). ¹¹ R. B. Sallnas, Rev. Acad. Sc. Madrid, v. 49 (1955). ¹² А. А. Кутбалин, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 10, № 3 (1975). ¹³ М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 17, № 4 (1982).