ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1986 3

УДК 539.376

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Ф. М. Поладян

Нелинейная ползучесть составного сектора кругового кольца с прямоугольным поперечным сечением при кручении

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 13/XI 1985)

Рассматривается задача о кручении составного сектора кругового кольца (кривой стержень), поперечное сечение которого состоит из N различных областей, материалы которых обладают свойством нелинейной наследственной ползучести ([1]), с различными мерами ползучести и модуля мгновенного сдвига.

Пусть рассматриваемый сектор кругового кольца с постоянным поперечным сечением находится под воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов PR (R—радиус сектора кольца), приложенных на торцевых сечениях (рис. 1).

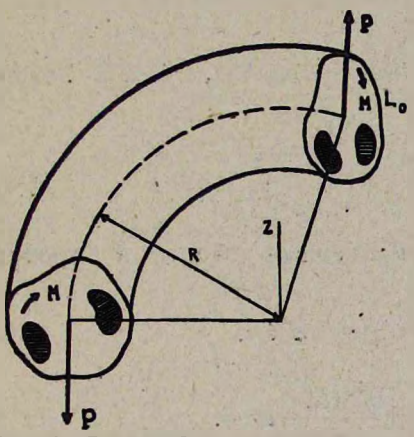

Рис. 1. Составной сектор кругового кольца, находящийся под воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов $M=PR$, приложенных на торцевых сечениях

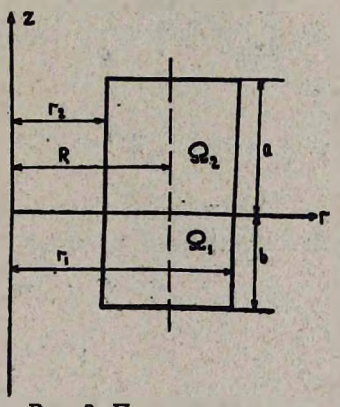

Рис. 2. Поперечное сечение скручиваемого составного сектора кругового кольца

Пластическое кручение однородных кривых стержней из упрочняющегося материала исследовано в ([2,3]). Кручение однородных кривых стержней при нелинейной ползучести исследовано в ([4,5]), а составного сектора кругового кольца с круговым поперечным сечением при ползучести рассмотрено в ([6]).

1. Принимаем, что в области Ω_m между компонентами деформации ползучести и напряжениями имеют место соотношения Н. Х. Арутюняна ([1]):

$$2G_m e_{ij}^{(m)} = s_{ij}^{(m)} - \int_{\tau_1}^{t} s_{ij}^{(m)} f_m[\sigma_0^{(m)}(\tau)] K_m(t, \tau) d\tau \quad (m = 1, 2, \ldots, N), \qquad (1.1)$$

где $G_m = E_m/3$, E_m принимается постоянным, $s_{ij}^{(m)} = \sigma_{ij}^{(m)} - \delta_{ij}\sigma^{(m)}$, δ_{ij}—символ Кронекера, $\sigma^{(m)}$—среднее давление, $f_m[\sigma_0^{(m)}(t)]$—функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести, $\sigma_0^{(m)}(t)$—интенсивность тензора напряжений в области Ω_m, $K_m(t, \tau) = 3G_m \dfrac{\partial C_m(t, \tau)}{\partial \tau}$, $C_m(t, \tau)$—мера ползучести в области Ω_m.

Аналогично (7) получим уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\varepsilon_{z\theta}^{(m)}}{r}\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\varepsilon_{r\theta}^{(m)}}{r}\right] = \frac{D(t)}{r^3} \quad (m = 1, 2, \ldots, N). \qquad (1.2)$$

В каждой области Ω_m, вводя функцию напряжений $\sigma_{r\theta}^{(m)} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial \Phi_m}{\partial z}$, $\sigma_{z\theta}^{(m)} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial \Phi_m}{\partial r}$ $(m = 1, 2, \ldots, N)$, при помощи соотношений (1.1) и (1.2) получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial \Phi_m}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial \Phi_m}{\partial z}\right) - \int_{\tau_1}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{f_m(\sigma_0^{(m)})}{r^3}\frac{\partial \Phi_m}{\partial r}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{f_m(\sigma_0^{(m)})}{r^3}\frac{\partial \Phi_m}{\partial z}\right]\right\} K_m(t, \tau) d\tau = -\frac{D(t) G_m}{r^3} \quad (m = 1, 2, \ldots, N), \qquad (1.3)$$

где

$$\sigma_0^{(m)} = \sigma_0^{(m)}(t) = r^{-1}\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial z}\right)^2}. \qquad (1.4)$$

Аналогично ([6,7]) можно получить контурные условия и условия на линиях контакта L_{lk}:

$$\Phi = C_0(t) \text{ на } L_0, \quad \Phi_l = \Phi_k + C_{lk}^*(t) \text{ на } L_{lk}, \qquad (1.5)$$

$$\frac{1}{G_l}\frac{\partial \Phi_l}{\partial n} - 3\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial \Phi_l}{\partial n} f_l[\sigma_0^{(l)}]\frac{\partial C_l(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{G_k}\frac{\partial \Phi_k}{\partial n} - 3\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial \Phi_k}{\partial n} f_k[\sigma_0^{(k)}]\frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \text{ на } L_{lk}, \qquad (1.6)$$

где n—нормаль к L_{lk}, $C_0(t)$ и $C_{lk}^*(t)$ произвольные функции от t.

Крутящий момент определяется аналогичной формулой ([8]).

2. Рассмотрим случай, когда поперечное сечение состоит из двух прямоугольных областей (рис. 2). Пусть в области Ω_1 материал обладает свойством нелинейной ползучести, а в области Ω_2 справедлив закон Гука. На основании вышеизложенного функция Φ_1 в области Ω_1 удовлетворяет уравнению (1.3), а функция Φ_2 в области Ω_2 уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right)=-\frac{D(t)G_2}{r^3}. \qquad (2.1)$$

Полагая $f_1[\sigma_0^{(1)}]=1+\lambda[\sigma_0^{(1)}]^3$, решение уравнений (1.3) и (2.1) ищем в виде

$$\Phi_i(r, z, t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\Phi_{in}(r, z, t) \quad (i=1, 2). \qquad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (1.3) и (1.4), приходим к системе рекуррентных дифференциальных уравнений относительно $\Phi_{in}(r, z, t)$.

Функции $\Phi_{in}(r, z, t)$ представим в виде рядов [8,9]

$$\Phi_{in}(r, z, t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^n(z, t)\,W_2(\mu_k r), \quad (i=1, 2). \qquad (2.3)$$

Здесь $W_n(\mu_k r)=\dfrac{J_n(\mu_k r)}{J_2(\mu_k r_2)}-\dfrac{Y_n(\mu_k r)}{Y_2(\mu_k r_2)}$ $(n=1, 2, \ldots)$,

где $J_n(x)$ и $Y_n(x)$—функции Бесселя от действительного аргумента n-го порядка соответственно первого и второго рода, а $\{\mu_k\}$—корни уравнения $W_2(\mu r_1)=0$. Функции $W_i(x)$ удовлетворяют тем же рекуррентным формулам, что и функции $J_n(x)$, $Y_n(x)$.

Пользуясь (1.5)—(1.6) и (2.2)—(2.3), получим граничные условия для функции

$$a_{1k}^n(-b, t)=a_{2k}^n(a, t)=0, \quad a_{1k}^n(0, t)=a_{2k}^n(0, t), \qquad (2.4)$$

$$\frac{G_1}{G_2}\frac{\partial a_{2k}^n(z, t)}{\partial z}=\frac{\partial a_{1k}^n(z, t)}{\partial z}-\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial a_{1k}^n(z, \tau)}{\partial z}K_1(t, \tau)d\tau+$$

$$+F_k^n(z, t) \text{ при } z=0, \qquad (2.5)$$

где $F_k^0(z, t)=0$, а при $n\geqslant 1$, $F_k^n(z, t)=$

$$=\frac{1}{\omega_k^*}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{r_1}^{r_2}\left[\int_{\tau_1}^{t}\omega_j\frac{\partial \Phi_{1,n-1-j}}{\partial z}K_1(t, \tau)d\tau\right]r\,W_2(\mu_k r)dr,$$

$$\omega_k^*=0{,}5\{[r_2\,W_1(\mu_k r_2)]^2-[r_1\,W_1(\mu_k r_1)]^2\},$$

$$\omega_n=r^{-4}\sum_{k=0}^{4}\operatorname{grad}\Phi_{1k}\cdot\operatorname{grad}\Phi_{1,n-k}.$$

Коэффициенты $a_{ik}^n(z, t)$, удовлетворяющие условиям (2.4)—(2.5), определяются следующими формулами:

$$a_{1k}^n(z, t)=\left\{\frac{C_{1k}^n(z, t)}{\mu_k^3\operatorname{ch}\mu_k b}+\operatorname{th}\mu_k b\left[h_k^n(z, t)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\nu_k\int_{\tau_1}^{t}h_k^n(z, \tau)R_1(t, \tau)d\tau\right]\right\}\operatorname{ch}\mu_k z+\left[h_k^n(z, t)+\right.$$

$$\left.+\nu_k\int_{\tau_1}^{t}h_k^n(z, \tau)R_1(t, \tau)d\tau\right]\operatorname{sh}\mu_k z-\frac{C_{1k}^n(z, t)}{\mu_k^3};$$

$$a_{2k}^n(z,\ t)=\left\{\frac{C_{1k}^n(z,\ t)}{\mu_k^2 ch\mu_k b}-\frac{1}{\mu_k^2}[C_{1k}^n(z,\ t)-C_{2k}^n(t)]+\right.$$

$$\left.+th\mu_k b\left[h_k^n(z,\ t)+\nu_k\int_{\tau_1}^{t}h_k^n(z,\ \tau)R_1(t,\ \tau)d\tau\right]\right]ch\mu_k z+\left\{m_k^n(z,\ t)+\right.$$

$$\left.+n_k\left[h_k^n(z,\ t)+\nu_k\int_{\tau_1}^{t}h_k^n(z,\ \tau)R_1(t,\ \tau)d\tau\right]\right\}sh\mu_k z-\frac{C_{2k}^n(t)}{\mu_k^2},$$

где $C_{1k}^n(z,\ t)=(\omega_k^*)^{-1}\int_{r_1}^{r_2}Q_n(r,\ z,\ t)r^{-1}W_2(\mu_k r)dr,$

$$C_{2k}^0(t)=(\omega_k^*)^{-1}D(t)G_2\int_{r_1}^{r_2}r^{-1}W_2(\mu_k r)dr,\quad C_{2k}^n(t)=0\quad(n=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$h_k^n(z,\ t)=\frac{G_1m_k^n(z,\ t)-G_2F_k^n(z,\ t)}{G_2-n_kG_1},\quad \nu_k=\frac{G_2}{G_2-n_kG_1},\quad n_k=-\frac{th\mu_k b}{th\mu_k a},$$

$$m_k^n(z,\ t)=\frac{C_{2k}^n(t)}{\mu_k^2 sh\mu_k a}+\frac{1}{\mu_k^2 sh\mu_k a}[C_{1k}^n(z,\ t)-C_{2n}^n(t)]ch\mu a-$$

$$-\frac{C_{1k}^n(z,\ t)ch\mu_k a}{\mu_k^2 sh\mu_k a ch\mu_k b},\quad Q_0(t)=G_1\left[D(t)+\int_{\tau_1}^{t}D(\tau)R_1(t,\ \tau)d\tau\right],$$

$$Q_n(r,\ z,\ t)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\tau_1}^{t}N_1(t,\ \tau)[\mathrm{grad}\Phi_{1n}\mathrm{grad}\Phi_{1,n-1-k}-\omega_k Q_{n-1-k}]d\tau$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$N_1(t,\ \tau)=K_1(t,\ \tau)+\int_{\tau_1}^{t}R_1(t,\ \xi)K_1(\xi,\ \tau)d\xi,$$

$R_1(t,\ \tau)$—резольвента ядра $K_1(t,\ \tau)$. Для меры ползучести $C_1(t,\ \tau)=(C_{01}+A_{11}\tau^{-1})[1-e^{-\gamma_1(t-\tau)}]$ $R_1(t,\ \tau)$ определяется так, как в (6).

Аналогично (4,5) доказывается существование решения задачи.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Ե. Մ. ՓՈԼԱԴՅԱՆ

Ուղղանկյուն ուղղահայաց հատվածքով բաղադրյալ շրջանային օղակի սեկտորի ոչ-գծային սողքը ոլորման դեպքում

Ուսումնասիրվում է ժառանգական, տարբեր ոչ-գծային սողքի հատկություններ ունեցող նյութերից կազմված շրջանային օղակի սեկտորի ոլորման խնդիրը։

Օգտվելով գլանային կոորդինատների համակարգից, խնդիրը բերվում է

յուրաքանչյուր տիրույթում ոչ-գծային ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրմանը՝ խառը եզրային պայմաններով։

Ուսումնասիրվում է ուղղանկյուն ուղղահայաց հատույթի այն դեպքը, երբ բաժանման գիծը ղուգահեռ է բևեռային առանցքին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян,* Некоторые вопросы теории ползучести, ГИТТЛ, М.—Л., 1952. [2] *М. А. Задоян,* ДАН СССР, т. 223, №2 (1975). [3] *М. А. Задоян,* Изв. АН СССР. МТТ № 1, 1977. [4] *М. А. Задоян, Ф. М. Поладян,* ДАН АрмССР, т. 71. № 3 (1980). [5] *Ф. М. Поладян,* Изв. АН Арм.ССР. Механика, т. 34, №2 (1981). [6] *М. А. Задоян, Ф. М. Поладян,* Изв. АН АрмССР. Механика, т. 36, №5 (1983). [7] *Ф. М. Поладян,* ДАН АрмССР, т. 75, № 2 (1982). [8] *Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян,* Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963. [9] *Г. Н. Ватсон,* Теория бесселевых функций, ч. 1, М., ИЛ, 1949.