ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1986 3

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Г. Саакян

Неоднородные упругие среды, для которых векторное волновое уравнение разделяется на независимые скалярные уравнения

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 27/IX 1985)

Предположим, что коэффициенты Ламе λ, μ и плотность ρ упругой среды в цилиндрической системе координат (r, θ, z) зависят только от переменной z. Тогда вектор перемещения [1]

$$\vec{u} = \psi_1(z)\,\mathrm{grad}\,\Phi_1(r, z, t) + \psi_2(z)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,[\Phi_2(r, z, t)\hat{i}_z] + \mathrm{rot}\,[\Phi_3(r, z, t)\hat{i}_z], \tag{1}$$

при условии определения $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ из соотношений:

$$(\mu p_1)' + \mu p_1^2 = K, \quad (\xi p_2)' + \xi p_2^2 = K, \quad K' = p_\rho K,$$

$$p_1 + p_2 + p_\rho = 0, \quad p_1 + \gamma p_2 + 2p_\mu = 0; \tag{2}$$

$$p_1 = \psi_1'/\psi_1, \quad p_2 = \psi_2'/\psi_2, \quad p_\rho = \rho'/\rho, \quad p_\mu = \mu'/\mu, \tag{3}$$

разделяет известное векторное уравнение упругости

$$\xi\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} + \mathrm{grad}\,\lambda \cdot \mathrm{div}\,\vec{u} + \mathrm{grad}\,\mu \times \mathrm{rot}\,\vec{u} +$$

$$+ 2\,\mathrm{grad}\,\mu \cdot \mathrm{grad}\,\vec{u} = \rho\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \tag{4}$$

на независимые скалярные уравнения для обобщенных потенциалов Φ_1, Φ_2, Φ_3:

$$L_1[\Phi_1] \equiv \Delta\Phi_1 + (2p_1 + p_\rho)\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \gamma^{-1}(p_1' + p_1^2 + p_1 p_\mu)\Phi_1 - v_1^{-2}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = 0,$$

$$L_2[\Phi_2] \equiv \Delta\Phi_2 + [(\gamma+1)p_2 + 2p_\mu]\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + [(\gamma p_2)' + \gamma p_2^2 + \gamma p_2 p_\mu]\Phi_2 - v_2^{-2}\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = 0,$$

$$L_3[\Phi_3] \equiv \Delta\Phi_3 + p_\mu\frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - v_3^{-2}\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial t^2} = 0, \tag{5}$$

где $\hat{i}_z$ — орт по оси z, $\xi = \lambda + 2\mu$, $\gamma = \xi/\mu$, $v_1^2 = \xi/\rho$, $v_2^2 = \mu/\rho$, $v_3 = v_2$.

Покажем, что существуют слоисто-неоднородные изотропные упругие среды, для которых возможно разделение векторного уравнения упругости на независимые скалярные уравнения.

Из условия (2) следует:

$$p_1' + p_\mu p_1 + p_1^2 = C\mu^{-1}\rho, \tag{6}$$

$$p_2' + \gamma p_\mu p_2 + p_2 = C\gamma^{-1}\mu^{-1}\rho. \tag{7}$$

$$p_1+p_2+p_\rho=0, \tag{8}$$

$$p_1+\gamma p_2+p_\mu=0, \tag{9}$$

где C—произвольная постоянная.

Эквивалентными преобразованиями уравнения (6) и (7) при $\gamma=\text{const}$ приводятся к виду:

$$(p_1+\gamma p_2)'+p_\mu(p_1+\gamma p_2)+p_1^2+\gamma p_2^2=2C\mu^{-1}\rho, \tag{10}$$

$$(p_1-p_2)'+p_\mu(p_1-p_2)+p_1^2-p_2^2=C\mu^{-1}\rho(1-\gamma^{-1}). \tag{11}$$

Из уравнений (9) и (10) имеем:

$$p_1=-2(\gamma+1)^{-1}[p_\mu\pm\gamma\Omega], \tag{12}$$

$$p_2=-2(\gamma+1)^{-1}[p_\mu\mp\Omega], \tag{13}$$

$$2\gamma\Omega^2=(\gamma+1)p_\mu'+(\gamma-1)p_\mu^2+(\gamma+1)C\mu^{-1}\rho. \tag{14}$$

Подставляя в уравнения (8) и (11) выражения (12) и (13), получим

$$(\gamma+1)p_\rho=4p_\mu\pm2(\gamma-1)\Omega, \tag{15}$$

$$(\gamma+1)\Omega'+(\gamma-3)p_\mu\Omega\mp2(\gamma-1)\Omega^2-\frac{\gamma^2-1}{2\gamma}C\mu^{-1}\rho=0. \tag{16}$$

Если $C=0$, то из уравнений (14) и (16) для определения Ω и p_μ получим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}(\gamma+1)\Omega'+(\gamma-3)p_\mu\Omega\mp2(\gamma-1)\Omega^2=0,\\ (\gamma+1)p_\mu'+(\gamma-1)p_\mu^2-2\gamma\Omega^2=0.\end{gathered} \tag{17}$$

Решение системы (17) представим в виде

$$\Omega=\frac{A}{z},\qquad p_\mu=\frac{B}{z}, \tag{18}$$

где A и B постоянные.

В результате получим следующую алгебраическую систему для определения A и B:

$$\begin{gathered}A[\gamma+1-(\gamma-3)B\pm2(\gamma-1)A]=0,\\ (\gamma-1)B^2-(\gamma+1)B-2\gamma A^2=0.\end{gathered} \tag{19}$$

Система (19) имеет следующие решения:

$$\text{I)}\ \ A=0,\ B=0;\qquad \text{II)}\ \ A=0,\ \ B=\frac{\gamma+1}{\gamma-1};$$

$$\text{III)}\ \ A=\mp\frac{1}{\gamma-2},\ \ B=\frac{\gamma}{\gamma-2};\qquad \text{IV)}\ \ A=\mp1,\ \ B=-1. \tag{20}$$

Рассмотрим эти случаи.

I случай: $\Omega=0$, $p_\mu=0$. По формулам (12), (13) и (15) получим $p_1=0$, $p_2=0$, $p_\rho=0$. Из соотношений (3) следует:

$$\psi_1=\psi_{10},\ \ \psi_2=\psi_{20};\ \ \mu=\mu_0,\ \ \xi=\gamma\mu_0,\ \ \rho=\rho_0. \tag{21}$$

Следовательно, среда однородная и имеет место известное разделение векторного волнового уравнения на независимые скалярные уравнения для потенциалов Гельмгольца.

II случай: $\Omega=0$, $p_\mu=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\cdot\frac{1}{z}$. Тогда $p_1=-\frac{2}{\gamma-1}\cdot\frac{1}{z}$, $p_2=-\frac{2}{\gamma-1}\cdot\frac{1}{z}$, $p_\rho=\frac{4}{\gamma-1}\cdot\frac{1}{z}$. Интегрируя уравнения (3), имеем:

$$\psi_1=\psi_{10}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-\frac{2}{\gamma-1}},\quad \psi_2=\psi_{20}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-\frac{2}{\gamma-1}}; \tag{22}$$

$$\mu=\mu_0\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}},\quad \xi=\gamma\mu,\quad \rho=\rho_0\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{4}{\gamma-1}}. \tag{23}$$

III случай: $\Omega=\mp\frac{1}{\gamma-2}\cdot\frac{1}{z}$, $p_\mu=\frac{\gamma}{\gamma-2}\cdot\frac{1}{z}$. Величины $p_1=0$, $p_2=-\frac{2}{\gamma-2}\cdot\frac{1}{z}$, $p_\rho=\frac{2}{\gamma-2}\cdot\frac{1}{z}$. При этом

$$\psi_1=\psi_{10},\quad \psi_2=\psi_{20}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-\frac{2}{\gamma-2}}; \tag{24}$$

$$\mu=\mu_0\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-2}},\quad \xi=\gamma\mu,\quad \rho=\rho_0\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-2}}. \tag{25}$$

IV случай: $\Omega=\mp\frac{1}{z}$, $p_\mu=-\frac{1}{z}$. Величины $p_1=\frac{2}{z}$, $p_2=0$, $p_\rho=-\frac{2}{z}$. Из соотношений (3) при любых значениях γ получим:

$$\psi_1=\psi_{10}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{2},\quad \psi_2=\psi_{20}; \tag{26}$$

$$\mu=\mu_0\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-1},\quad \xi=\gamma\mu,\ \rho=\rho_0\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-2}. \tag{27}$$

В случаях II—IV упругая среда неоднородная, векторное уравнение разделяется на независимые скалярные уравнения. Аналогичные результаты получены в работе ([2]) другим путем.

Если $C\neq0$, то после интегрирования уравнения (15) имеем

$$\mu^{-1}\rho=\mu_0^{-1}\rho_0\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{-\frac{\gamma-3}{\gamma+1}}\exp\left[\pm\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}\int_{z_0}^{z}\Omega dz\right]. \tag{28}$$

Подставляя значение $\mu^{-1}\rho$ в уравнения (14) и (16), получим следующую систему интегродифференциальных уравнений:

$$(\gamma+1)\Omega'+(\gamma-3)p_\mu\Omega\mp2(\gamma-1)\Omega^2\pm$$

$$\pm\frac{\gamma^2-1}{2\gamma}\mu_0^{\frac{4}{\gamma+1}}\rho_0 C\mu^{-\frac{\gamma-3}{\gamma+1}}\exp\left[\pm\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}\int_{z_0}^{z}\Omega dz\right]=0,$$

$$(\gamma+1)p_\mu'+(\gamma-1)p_\mu^2-2\gamma\Omega^2+$$

$$+(\gamma+1)\mu_0^{\frac{4}{\gamma+1}}\rho_0 C\mu^{-\frac{\gamma-3}{\gamma+1}}\exp\left[\pm\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}\int_{z_0}^{z}\Omega dz\right]=0. \tag{29}$$

Представим решение системы (29) в виде

$$\Omega=\frac{D}{z}, \quad p_{\mu}=\frac{E}{z}, \tag{30}$$

где D и E постоянные.

Постоянные C, D и E определяются из системы алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}
\pm 2(\gamma-1)D-(\gamma-3)E+2(\gamma+1)=0,\\
\mp\frac{\gamma^2-1}{2\gamma}\frac{\rho_0 z_0^2}{\mu_0}C+(\gamma+1)D\pm 2(\gamma-1)D^2-(\gamma-3)E=0,\\
(\gamma+1)\frac{\rho_0 z_0^2}{\mu_0}C+2\gamma D^2+(\gamma+1)E-(\gamma-1)E^2=0.
\end{gathered} \tag{31}$$

Решение системы (31) соответствует двум случаям неоднородных упругих сред.

1. При значении $C=\dfrac{2\gamma(\gamma+1)}{(\gamma-1)^2}\dfrac{\mu_0}{\rho_0 z_0^2}$, $D=\mp\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}$, $E=0$, имеем:

$$\psi_1=\psi_{10}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad \psi_2=\psi_{20}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-\frac{2}{\gamma-1}}; \tag{32}$$

$$\mu=\mu_0, \quad \xi=\gamma\mu_0, \quad \rho=\rho_0\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-2}. \tag{33}$$

2. При значении $C=\dfrac{2\gamma}{\gamma-2}\dfrac{\mu_0}{\rho_0 z_0^2}$, $D=\mp\dfrac{\gamma-1}{\gamma-2}$, $E=\dfrac{2}{\gamma-2}$, получим:

$$\psi_1=\psi_{10}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{2}, \quad \psi_2=\psi_{20}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-\frac{2}{\gamma-2}}; \tag{34}$$

$$\mu=\mu_0\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-2}}, \quad \xi=\gamma\mu, \quad \rho=\rho_0\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-\frac{2(\gamma-3)}{\gamma-2}}. \tag{35}$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ս. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Անհամասեռ առաձգական միջավայրեր, որոնց համար վեկտորական ալիքային հավասարումը տրոհվում է անկախ սկալյար հավասարումների

Աշխատանքում դիտարկվում են անհամասեռ առաձգական միջավայրեր, որոնց համար հնարավոր է առաձգականության տեսության վեկտորական ալիքային հավասարումը տրոհել իրարից անկախ սկալյար հավասարումների։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Г. Саакян*, ДАН СССР т. 269, № 3 (1983). [2] *J. F. Hook*, J. Acoust. Soc. Am., v. 33, p. 302—313 (1961).