

УДК 621.391.15

МАТЕМАТИКА

С. С. Мартirosян

**Новая конструкция базисных однозначно декодируемых кодов
для суммирующего канала со многими пользователями**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 29/VIII 1985)

Модель суммирующего канала связи со многими пользователями можно представить следующим образом.

T статистически-независимых источников (пользователей), используя соответственно блочные двоичные коды $C_1, C_2, \dots, C_T$ длины n , передают информацию через общий канал связи, сохраняя при этом синхронизацию по словам и по битам.

Пусть $x_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $x_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$, ..., $x_T = (x_1^{(T)}, x_2^{(T)}, \dots, x_n^{(T)})$ кодовые векторы соответственно кодов $C_1, C_2, \dots, C_T$, подлежащих передаче. Тогда на выходе канала получается вектор $E(x_1, x_2, \dots, x_T) = \left(\sum_{i=1}^T x_i^{(1)}, \sum_{i=1}^T x_i^{(2)}, \dots, \sum_{i=1}^T x_i^{(n)} \right)$, где $\sum_{i=1}^T x_i^{(l)}$ означает обычную сумму двоичных компонентов $x_i^{(l)}$. Систему кодов $C_1, C_2, \dots, C_T$ назовем однозначно декодируемой, если для двух различных множеств $(x_1, x_2, \dots, x_T)$, $(x'_1, x'_2, \dots, x'_T)$, где $x_i, x'_i \in C_i$, имеет место $E(x_1, x_2, \dots, x_T) \neq E(x'_1, x'_2, \dots, x'_T)$.

Скорость передачи l -ого пользователя определяется как величина $R_l = \frac{\log_2 |C_l|}{n}$, где $|C_l|$ — число векторов кода C_l .

Скорость передачи всей системы определяется как сумма скоростей всех пользователей $R = \sum_{i=1}^T R_i$.

Проблема в общем случае заключается в построении однозначно декодируемой системы кодов $C_1, C_2, \dots, C_T$ так, чтобы суммарная скорость была максимальной. В ⁽¹⁻³⁾ рассмотрена эта задача при $T=2$.

В ^(4,5) Чангом и Велдоном рассмотрена задача при условии $|C_l|=2$, при всех $1 \leq l \leq T$. Такие коды называются базисными. В этом случае скорость передачи каждого пользователя одинакова и равна $\frac{\log_2 2}{n} = \frac{1}{n}$. Следовательно максимизация суммарной скорости при заданном T равносильна минимизации n . В настоящей работе дается новая конструкция построения базисных кодов, что позволяет увеличивать скорость передачи.

Пусть $C_l = \{x_i y_i\} = \{(x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \dots, x_n^{(l)}), (y_1^{(l)}, y_2^{(l)}, \dots, y_n^{(l)})\}$, так назы-

ваемая разностная матрица $\tilde{D}$ определяется следующим образом: $\tilde{D}=(d_{ij})$, где $d_{ij}=(x_i^{(j)}-y_j^{(i)})$, $d_{ij} \in \{0, 1, -1\}$, $i \in \overline{1, T}$, $j \in \overline{1, n}$. Из этого определения вытекает следующая

Теорема 1. Пусть $m=(m_1, m_2, \dots, m_T)$ вектор с $m_i \in \{0, 1, -1\}$. Тогда $C_1, C_2, \dots, C_T$ является однозначно декодируемым кодом с T пользователями, если условие $m\tilde{D}=0^N$ имеет место тогда и только тогда, когда $m=0^T$, где 0^N означает N -мерный нулевой вектор.

Для длины кода, равной n , обозначим через $\tilde{D}_n$ разностную матрицу однозначно декодируемого кода с $C_1, C_2, \dots, C_T$ $\tilde{D}_n=(d_1^n, d_2^n, \dots, d_n^n)$, а через T_n —число пользователей.

Теорема 2. Если $\tilde{D}_u$ и $\tilde{D}_v$ разностные матрицы однозначно декодируемых базисных кодов соответственно для длин u и v ($u \leq v$), то матрица

$$\tilde{D}_{u+v} = \left| \begin{array}{c|c|c} -\tilde{D}_v^u & \tilde{D}_v & \\ \hline \tilde{D}_u & \tilde{D}_u & \tilde{A} \\ \hline \tilde{I}_u & \tilde{O}_u & \tilde{B} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c|c} -d_1^v-d_2^v \dots d_u^v & d_1^v d_2^v \dots d_v^v & \\ \hline d_1^u d_2^u \dots d_u^u & d_1^u d_2^u \dots d_u^u & \tilde{A} \\ \hline e_1 e_2 \dots e_u & 0 \ 0 \dots 0 & \tilde{B} \end{array} \right|, \quad (1)$$

где $\tilde{D}_v^u$ состоит из u первых столбцов матрицы $\tilde{D}_v$; $\tilde{I}_u$ —единичная матрица размера $u \times u$; $\tilde{O}_u$ —нулевая матрица размера $u \times u$; $\tilde{A}, \tilde{B}$ произвольные матрицы с элементами из $\{0, 1, -1\}$, является разностной матрицей для однозначно декодируемого кода длины $u+v$.

Доказательство. Пусть $m=(m_1, m_2, m_3) = (m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1T}, m_{21}, m_{22}, \dots, m_{2T}, m_{31}, m_{32}, \dots, m_{3u})$, $m_{ij} \in \{0, 1, -1\}$. Составим произведение $m\tilde{D}_{u+v}$ и наложим условие

$$m\tilde{D}_{u+v} = \tilde{O}_{u+v} \quad (2)$$

Рассмотрим (2) как систему $u+v$ уравнений относительно компонентов вектора m и докажем, что эта система при ограничении $m_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ имеет единственное решение — нулевое. Тем самым будет выполняться условие теоремы 1, а значит и теоремы 2.

Суммируя l -ое уравнение системы (2) с уравнением $u+l$ для всех $1 \leq l \leq u$, получим систему

$$\begin{aligned} 2m_2 d_1^u + m_2 e_1 &= 0, \\ 2m_2 d_2^u + m_2 e_1 &= 0, \\ &\vdots \\ 2m_2 d_u^u + m_2 e_u &= 0 \end{aligned}$$

или, так как $m_2 e_l = m_{3l}$,

$$\begin{aligned} 2m_2 d_1^u + m_{31} &= 0, \\ 2m_2 d_2^u + m_{32} &= 0, \\ &\vdots \\ 2m_2 d_u^u + m_{3u} &= 0, \end{aligned}$$

откуда ввиду ограничения $m_i \in \{0, 1, -1\}$ $m_{s1} = 0$ для всех $1 \leq i \leq u$ или $m_s = O^u$, следовательно $m_s \bar{D}_u = O^u$, откуда $m_s = O^{T_u}$ ввиду теоремы 1.

Тогда система 2 примет вид $m_1(-\bar{D}_u \bar{D}_v) = O^{u+v}$, откуда $m_1 \bar{D}_v = O^v$, следовательно (теорема 1) $m_1 = O^{T_u}$. Таким образом окончательно получаем $m = O^{T_u + T_v + u}$.

Теорема 2 позволяет построить D_u , имея $D_{u_1}, D_{u_2}, \dots, D_{u_s}$, где $u = u_1 + u_2 + \dots + u_s$, при любом s .

Представим n в виде $n = \sum_{k=0}^s n_k 2^k$, $s = [\log_2 n]$, $n_k \in \{0, 1\}$. Обозначим через $n^{(j)} = \sum_{k=0}^j n_k 2^k$.

Применяя теорему 2 для длин $u = n_j n^{(j)}$, $v = \sum_{r=j+1}^s n_r 2^r$ (очевидно $u \leq v$), последовательно взяв j равным $s-1, s-2, \dots, 1, 0$, построение $\bar{D}_n$ сводится к построению $\bar{D}_{2^s}, \bar{D}_{2^{s-1}}, \dots, \bar{D}_{2^0}$.

Число пользователей в этом случае можно получить последовательно согласно соотношению $T_{u+v} = T_u + T_v + u$, т. е.

$$\begin{aligned} T_n &= T_{2^s} + T_{n^{(s-1)}} + n^{(s-1)} = T_{2^s} + n_{s-1} T_{2^{s-1}} + T_{n^{(s-2)}} + n_{s-1} n^{(s-1)} + n^{(s-2)} = \\ &= T_{2^s} + n_{s-1} T_{2^{s-1}} + \dots + n_0 T_{2^0} + n_{s-1} n^{(s-1)} + n_{s-2} n^{(s-2)} + \dots + n_0 = \\ &= \sum_{k=0}^s n_k T_{2^k} + \sum_{l=0}^{s-1} n_l \sum_{k=0}^l n_k 2^k \end{aligned}$$

или, так как $T_{2^k} = (k+2)2^{k-1}$ (см. (4)), это получается также из теоремы 2), то

$$T_n = \sum_{k=0}^s n_k (k+2)2^{k-1} + \sum_{l=0}^{s-1} n_l \sum_{k=0}^l n_k 2^k. \quad (3)$$

Обозначим через T'_n число пользователей кода длины n , построенного в работе (5). Если n представить в виде $n = 2^l - j$, $0 < j < 2^{l-1}$, то оно выражается следующей формулой:

$$T'_n = (l+1)2^{l-1} - j - \sum_{k=0}^{l-2} j_k (k+2)2^{k-1}, \quad (4)$$

где $j-1 = \sum_{k=0}^{l-2} j_k 2^k$, $j_k \in \{0, 1\}$

Лемма 1. $T_n \geq T'_n$.

Доказательство. Если $n = 2^l - j$, то $s = l-1$, а $n_k = 1 - j_k$. Обозначим через $\alpha = \max_{\substack{n_r \neq 0 \\ r < l-1}} r$. Тогда формулу (3) можно видоизменить

следующим образом:

$$\begin{aligned} T_n &= T_{2^l - j} = \sum_{k=0}^{l-1} (1 - j_k) (k+2)2^{k-1} + \sum_{l=0}^{l-2} n_l \sum_{k=0}^l n_k 2^k = \\ &= \sum_{k=0}^{l-1} (k+2)2^{k-1} - \sum_{k=0}^{l-1} j_k (k+2)2^{k-1} + \sum_{l=0}^{l-1} n_l \sum_{k=0}^l n_k 2^k + \sum_{k=0}^{l-2} n_k 2^k = \end{aligned}$$

или

$$T_n = (l+1)2^{l-1} - \sum_{k=0}^{l-1} j_k(k+2)2^{k-1} + \sum_{l=0}^{n-1} n_l \sum_{k=0}^l n_k 2^k + 2^{l-1} - 2^{l-1} \dots \quad (5)$$

Вычитая из (5) (4), получим

$$T_n - T'_n = \sum_{l=0}^{n-1} n_l \sum_{k=0}^l n_k 2^k \geq 0. \quad (6)$$

Из (6) также получается следующее.

Следствие. Если в двоичном представлении числа имеется больше двух единиц, то $T_n > T'_n$.

Для практического построения разностной матрицы $\bar{D}_n$ удобнее будет пользоваться следующим утверждением.

Лемма 2. Пусть $n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. Тогда, если числа $T_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ и $T_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}$ для соответствующих матриц $\bar{D}_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$, $\bar{D}_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}$ выражаются формулой (4), то число T_n для матрицы $\bar{D}_n$, полученной из $\bar{D}_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ и $\bar{D}_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}$ согласно теореме 2, также выражается формулой (4).

Доказательство. Доказательство следует из соотношения

$$T_n = T_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} + T_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

и из того факта, что для четного n , если $\frac{n}{2} = \sum_{k=0}^l n_k 2^k$, $n_k \in \{0, 1\}$, $n = \sum_{k=1}^{l+1} n_k 2^k$, и для нечетного $n = \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}$, если $\frac{n-1}{2} = \sum_{k=0}^l n_{k-1} 2^k$, $n_k \in \{0, 1\}$, $n = 1 + \sum_{k=1}^{l+1} n_{k-1} 2^k$.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ս. Ս. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Շատ օգտվողներով գումարող կապուղու համար միարժեքորեն
ապակոդավորվող բազիսային կոդերի նոր կոնստրուկցիա

Հոդվածում տրվում է T օգտվողներով գումարող կապուղու համար միար-
ժեքորեն ապակոդավորվող երկուական կոդերի կառուցման նոր մեթոդ, որը
թույլ է տալիս մեծացնել հաղորդման արագությունը համեմատած (4) և (5)
աշխատանքներում կառուցված կոդերի: Դիտարկված մեթոդի հիմքում ընկած
է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ: Եթե $\bar{D}_u$ և $\bar{D}_v$ հանգիստնում են համապատասխանաբար
u և v ($u \leq v$) երկարությունների համար միարժեքորեն ապակոդավորվող

կոգերի տարրերական մատրիցաներ, ապա (1) մատրիցան ճանգիւսանում է $\mu + \nu$ երկարության ճամար միարժեքորեն ապակոգավորվող կոգի տարրերություն մատրիցա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ T. Kasami, S. Lin, V. Wel e. a., IEEE Trans. Inform. Theory, v. IT-29, № 1, p. 114—130 (1983). ² E. S. Weldon, Inform and control, № 36. p. 256—274 (1978). ³ G. H. Khachatryan, Problems of Control and Information Theory. v. 11 (4), p. 319—324 (1982). ⁴ S. C. Chang, E. J. Weldon, IEEE Trans. Inform. Theory, v. IT-25, № 6, p. 684—691 (1979). ⁵ S. C. Chang, IEEE Trans. Inform. Theory, v. IT-30, № 2, p. 411—415 (1984).