ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1936 3

УДК 517.518.3

МАТЕМАТИКА

Г. А. Карагулян

О подсистемах сходимости и о расходимости двойных рядов Фурье по полным ортонормированным системам

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 14/V 1985)

Известна следующая теорема, доказанная в 1936 г. независимо друг от друга Д. Е. Меньшовым и И. Марцинкевичем (см. [1,2]):

Теорема А. *Для любой ортонормированной системы* (*ОНС*) $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x\in(0,1)$, *существуют номера* $n_1<n_2<\ldots$ *такие, что подсистема* $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *является системой сходимости.* (*ОНС* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *называется системой сходимости, если всякий ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2<\infty$ *сходится почти всюду*).

По этому поводу в работе [3] Г. Беннетом был поставлен следующий вопрос: существует ли последовательность чисел $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что из любой ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно извлечь подсистему сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} n_k/r_k=0$?

В работе [4] Б. С. Кашиным дан положительный ответ на этот вопрос. В ней сформулирована следующая

Теорема В. *Из произвольной ОНС* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *можно выбрать подсистему сходимости* $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *с* $n_k<R_k$ $(k=1,2,\ldots)$, *где*

$$R_1=3,\quad R_{k+1}=(R_k)!\quad (k=1,2,\ldots). \tag{1}$$

В той же работе [4] В. С. Кашин поставил следующий вопрос: можно ли в формулировке теоремы В последовательность (1) заменить на последовательность $k^{1+\varepsilon}$ $(k=1,2,\ldots)$ для любого $\varepsilon>0$?

В настоящей работе усилен результат теоремы В. Точнее, справедлива следующая

Теорема 1. *Для любой ОНС* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x\in(0,1)$ *и любого* $\beta>0$ *существует подсистема сходимости* $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *с условием* $n_1=1$, $2^{(\beta+2)(k-1)\log_2(k-1)}<n_k\leqslant 2^{(2+\beta)k\log_2 k}$ $(k\geqslant 2)$.

Доказательство этой теоремы основано на следующих леммах:

Лемма 1. *Пусть* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{n}$, $x\in(0,1)$, *конечная ОНС и* $\{E_l\}_{l=1}^{m}$ *семейство измеримых множеств из* $(0,1)$. *Тогда существует целое число* $1\leqslant k\leqslant n$ *такое, что*

$$\frac{1}{\mu(E_p)}\left|\int\limits_{E_p}\varphi_k(t)\,dt\right|\leqslant\sqrt{\frac{m}{n\cdot\min\limits_{1\leqslant l\leqslant m}\mu(E_l)}},\quad p=1,2,\ldots,m.$$

Лемма 2. *Пусть ОНС* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x\in(0,1)$, *и семейства множеств из* $(0,1)$ $\{E_i^{(n)};\ i\in Q^{(n)}\}$, $n=1,2,\ldots$, *где* $Q^{(n)}(n\geq 1)$ *есть множество индексов* i, *удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\mu(\bigcup_{i\in Q^{(n)}} E_i^{(n)})=1$, $\mu(E_i^{(n)})>0$, $i\in Q^{(n)}$, $n=1,2,\ldots$;

2) $E_i^{(n)}\cap E_j^{(n)}=\varnothing$ *при* $i\neq j$, $i,j\in Q^{(n)}$ $(n=1,2,\ldots)$;

3) *если* $E_i^{(n)}\cap E_j^{(m)}\neq\varnothing$ $(n\geq m)$, *то* $E_i^{(n)}\subset E_j^{(m)}$;

4) *для любого* $n=1,2,\ldots$ *существует подмножество индексов* $G^{(n)}\subset Q^{(n)}$ *такое, что* $\sum_{n=1}^{\infty}[1-\mu(\bigcup_{i\in G^{(n)}} E_i^{(n)})]<\infty$, *и*

$$\frac{1}{\mu(E_i^{(k)})}\left|\int_{E_i^{(k)}}\varphi_n(t)dt\right|<\gamma_n$$

при $1\leq k\leq n-1$, $i\in G^{(k)}$, $n\geq 2$, *где* $\gamma_n(n\geq 2)$ *такие числа, что* $\sum_{n=2}^{\infty}\gamma_n<\infty$;

5) *для любого* $k=1,2,\ldots$ *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\mu(E_{i^{(n)}(x)}^{(n)})}\int_{E_{i^{(n)}(x)}^{(n)}}\varphi_k(t)dt-\varphi_k(x)\right|=0$$

при п. в. $x\in(0,1)$, *где* $E_{i^{(n)}(x)}^{(n)}$ — *то множество из семейства* $\{E_i^{(n)};\ i\in Q^{(n)}\}$, *которое содержит в себе точку* x *(очевидно, что для п. в.* $x\in(0,1)$, *при любом* $n\geq 1$ *такое множество существует, это следует из* 1) *и* 2));

6) *для любой точки* x *из множества* $E=\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{n\geq k}[\bigcup_{i\in G^{(n)}} E_i^{(n)}]$ *существует зависящее от* x *постоянное* $c(x)$ *такое, что*

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{\mu(E_{i^{(n)}(x)}^{(n)})}\int_{E_{i^{(n)}(x)}^{(n)}}\varphi_k(t)dt-\varphi_k(x)\right|^2<c(x)\quad(n=1,2,\ldots).$$

Тогда $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *является системой сходимости.*

Лемма 3. *Для любых чисел* $n=1,2,\ldots$, $k\leq n$ *и* $\alpha>\frac{1}{2}$ *существует семейство полуоткрытых интервалов* $\{\Delta_i^{(n)}(k);\ i\in Z\}$ (Z — *множество целых чисел), удовлетворяющее следующим условиям:*

1) $\bigcup_{i\in Z}\Delta_i^{(n)}(k)=R^1$ *при любых* $n\geq k\geq 1$ $(R^1=(-\infty,+\infty))$;

2) $\Delta_i^{(n)}(k)\cap\Delta_j^{(n)}(k)=\varnothing$ *при* $i\neq j$ $(n\geq k\geq 1)$;

3) *если* $n\geq m\geq k$ *и* $\Delta_i^{(n)}(k)\cap\Delta_j^{(m)}(k)\neq\varnothing$, *то* $\Delta_i^{(n)}(k)\subset\Delta_j^{(m)}(k)$;

4) *для любого* $k=1,2,\ldots$ *справедливо равенство* $\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\geq k}}[\sup_{i\in Z} d(\Delta_i^{(n)}(k))]=0$, *где* $d(\Delta_i^{(n)}(k))$ — *длина интервала* $\Delta_i^{(n)}(k)$.

5) *для любых* $n\geq k\geq 1$ *существуют конечные подмножества целых чисел* $G^{(n)}(k)$ *такие, что* $[-[k^{\alpha}],[k^{\alpha}])=\bigcup_{i\in G^{(n)}(k)}\Delta_i^{(n)}(k)$ $(n\geq k\geq 1)$

и $\max\limits_{i\in G^{(n)}(k)} d(\Delta_i^{(n)}(k))\leqslant\frac{2}{\sqrt{n}}$ $(n\geqslant k\geqslant 1)$, *где* $[k^\alpha]$—*целая часть* k^α.

6) *для любых* $n\geqslant k\geqslant 1$ *существуют конечные подмножества целых чисел* $L^{(n)}(k)$ *такие, что* $[-[n^{\frac{1}{2}+\alpha}],\ [n^{\frac{1}{2}+\alpha}])=\bigcup\limits_{i\in L^{(n)}(k)}\Delta_i^{(n)}(k)$ $(n\geqslant k\geqslant 1)$; $L^{(n)}(k)\supset G^{(n)}(k)$ $(n\geqslant k\geqslant 1)$; $|L^{(n)}(k)|\leqslant 4n^{2\alpha}$ $(n\geqslant k\geqslant 1)$, *где через* $|L^{(n)}(k)|$ *обозначается количество элементов множества* $L^{(n)}(k)$.

Рассматривается также вопрос о расходимости рядов Фурье по полным двойным ортонормированным системам $\{\varphi_i(x)\varphi_j(y)\}_{i,j=1}^{\infty}$.

Верна следующая

Теорема 2. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x\in(0, 1)$ *полная ОНС ограниченных функций. Тогда существует функция* $f(x, y)\in L^1((0, 1)\times(0, 1))$ *такая, что ее ряд Фурье по двойной системе* $\{\varphi_n(x)\varphi_m(y)\}_{n,m=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}(f)\varphi_i(x)\varphi_j(y)\ \left(b_{ij}(f)=\int_0^1\int_0^1 f(t, s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds\right)$$

расходится почти всюду (по Прингсхейму).

Для доказательства теоремы 2 используется известный факт о том, что двойной ряд Фурье по системе Хаара может п. в. расходиться (см. например ([5])).

Верна следующая, более общая теорема:

Теорема 3. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *полная ОНС на* (0, 1) *ограниченных функций и* $g(x, y)\in L^1((0, 1)\times(0, 1))$ *такова, что ее ряд Фурье по двойной системе Хаара расходится п. в. Тогда существует функция* $f(x, y)$ *равноизмеримая с* $g(x, y)$ *(т. е.* $\mu(\{(x, y);\ f(x, y)>\lambda\})=\mu(\{(x, y);\ g(x, y)>\lambda\})$*) такая, что расходится п. в. ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_{ij}(f)\varphi_i(x)\varphi_j(y)$.

В заключение выражаю благодарность чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ա. ԿԱՐԱԳՈՒԼՅԱՆ

Զուգամիտության համակարգերի և լրիվ օրթոնորմավորված համակարգերով Ֆուրյեի կրկնակի շարքերի տարամիտության մասին

Ձևակերպվում են հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 1. Յուրաքանչյուր $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ օրթոնորմավորված համակարգի համար գոյություն ունի նրա այնպիսի $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ զուգամիտության ենթահամակարգ, որի համար՝

$$n_1=1,\ 2^{(\beta+2)(k-1)\log_2(k-1)}<n_k\leqslant 2^{(\beta+2)k\log_2 k}(\beta>0,\ k=2, 3, \ldots):$$

Թեորեմ 2. Երբ $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ սահմանափակ ֆունկցիաներից կազմըված լրիվ օրթոնորմավորված համակարգ է, ապա գոյություն ունի $\{\varphi_n(x)\varphi_m(y)\}_{n,m=1}^{\infty}$ կրկնակի համակարգով Ֆուրյեի շարք, որը տարամիտում է համարյա ամենուրեք ուղղանկյան գումարներով:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *D. Menchoff*, Bull. de la Soc. Math. de Franch, v. 64, 3—4, p. 147—170 (1936). [2] *J. Marcinkiewich*, Studia Math., v. 6, p. 39—45 (1936). [3] *G. Bennett*, in: Notes in Banach spaces (edited by H. E. Lacey)—Austin University of Texas Press, 1980. [4] *Б. С. Кашин*, УМН, т. 40, №2, с. 181—182 (1985). [5] *О. П. Дзегнадзе*, Сообщ. АН ГССР, т. 34, №2, с. 277—282 (1964).