ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1986 3

УДК 517.986.225

МАТЕМАТИКА

А. В. Карабегов

О полиномиальных расширениях $C(X)$

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 1/II 1985)

0°. Пусть A и B—коммутативные унитальные банаховы алгебры. Будем говорить, что B является полиномиальным расширением алгебры A, если существует сохраняющий единицу инъективный изометрический гомоморфизм Φ из A в B такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[d, "I"'] & & B \\ A[x_1, \ldots, x_n] \arrow[urr, "\Psi"'] & & \end{tikzcd} \qquad (1)$$

коммутативна, где I—естественное вложение A в алгебру полиномов над A от n неизвестных $x_1, \ldots, x_n$, а Ψ—некоторый эпиморфизм [1].

Отметим, что если В является полиномиальным расширением алгебры A, многие свойства алгебры B можно описать через известные свойства алгебры A (например, пространство максимальных идеалов, границу Шилова и пр.). Поэтому если A и B—две унитальные банаховы алгебры, естественно поставить вопрос, является ли B полиномиальным расширением алгебры A.

В данной работе дается ответ на этот вопрос в случае, когда $A=C(X)$, $B=C(Y)$, где $C(X)$ и $C(Y)$—банаховы алгебры всех непрерывных функций на компактах X и Y соответственно.

1°. Пусть задан непрерывный инъективный гомоморфизм Φ алгебры $C(X)$ в алгебру $C(Y)$. Тогда определено двойственное отображение $\pi: Y\to X$, сюръективное и такое, что $\Phi f=f\circ\pi$ для $f\in C(X)$.

Введем, следуя Линдбергу [2], следующее

Определение. Окрестность $V\subset Y$ называется регулярной, если для любого $x\in X$ $\operatorname{card}(V\cap\pi^{-1}(x))\leqslant 1$, и сильно регулярной, если ее замыкание лежит в некоторой большей регулярной окрестности.

Заметим, что не всякая регулярная окрестность сильно регулярна.

Будем называть сюръекцию π регулярной, если у каждой точки $y\in Y$ есть регулярная окрестность.

Лемма 1. *Пусть $\pi: Y\to X$ регулярна. Тогда существует конечный набор функций из $C(Y)$, разделяющих для каждого $x\in X$ точки множества $\pi^{-1}(x)$.*

Лемма 2. *Пусть непрерывная сюръекция $\pi: Y\to X$ регулярна и выбраны функции $f_1, \ldots, f_m$ из $C(Y)$, разделяющие, в совокупнос-*

ти, для каждого $x \in X$ точки множества $\pi^{-1}(x)$. Тогда всякую функцию $f \in C(Y)$ можно представить в виде полинома от $f_1, \dots, f_m$ с коэффициентами из $C(X)$.

Доказательство. Пусть $V \subset Y$ сильно регулярная окрестность. Тогда любая функция f, непрерывная на $\overline{V}$, представима в виде $f = g \circ \pi$ на $\overline{V}$, где g—непрерывная функция на X. Действительно, рассмотрим компакт $\overline{V} \subset W$, где W—регулярная окрестность. Отображение $\pi: \overline{V} \to \pi(\overline{V})$—непрерывное, биективное отображение компактов, следовательно, это гомеоморфизм. Отображение $\tau: \pi(\overline{V}) \to \overline{V}$ позволяет определить функцию $f \circ \tau$, непрерывную на $\pi(\overline{V})$. Продолжим ее по непрерывности на весь компакт X. Полученная функция g искомая.

Поскольку сюръекция π регулярна, существует конечное покрытие компакта Y регулярными окрестностями. Для любой точки $x \in X$ имеем $\operatorname{card} \pi^{-1}(x) \leqslant N$, где N—число элементов покрытия, поскольку различные точки прообраза $\pi^{-1}(x)$ покрыты различными регулярными окрестностями.

Пусть $\pi^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_n\}$. Возьмем две различные точки из $\pi^{-1}(x)$, скажем, y_1 и y_2. Среди функций $f_1, \dots, f_m$ найдется функция f_k такая, что $f_k(y_1) \neq f_k(y_2)$. Выберем сильно регулярную окрестность V_1 точки y_1 и функцию $g \in C(X)$ такую, что $f = g \circ \pi$ на $\overline{V}_1$. Поэтому $(f_k - g \circ \pi)(y_1) = 0$ и, следовательно, $(f_k - g \circ \pi)(y_2) \neq 0$. Найдется сильно регулярная окрестность V_2 точки y_2 такая, что $f_k - g \circ \pi$ не обращается в ноль на $\overline{V}_2$. Тогда можно выбрать не обращающуюся в ноль функцию $h \in C(X)$ такую, что $h \circ \pi = f_k - g \circ \pi$ на $\overline{V}_2$. Тогда функция $f_{12} = \frac{1}{h \circ \pi}(f_k - g \circ \pi)$ обращается в ноль на V_1, в единицу на V_2 и является линейным многочленом от f_k с коэффициентами из $C(X)$. Рассматривая соответствующие функции f_{ij} для всех пар $y_i, y_j \in \pi^{-1}(x)$, легко построить $n = \operatorname{card} \pi^{-1}(x)$ окрестностей $W_1 \ni y_1, \dots, W_n \ni y_n$ и n полиномов $p_1, \dots, p_n$ от функций $f_1, \dots, f_m$ с коэффициентами из $C(X)$ таких, что $p_i(f_1, \dots, f_m)(y) = \delta_{ij}$ при $y \in W_j$, где δ_{ij}—символ Кронекера.

Построим теперь окрестность U точки $x \in X$ такую, что

$$\pi^{-1}(U) \subset \bigcup_{j=1}^{n} (W_j \cap \pi^{-1}(U)). \tag{2}$$

Поскольку $Y \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_j$—компакт в Y, то $\pi(Y \setminus \bigcup_{j=1}^{n} W_j)$—компакт в X, не содержащий точку $x \in X$, следовательно, найдется окрестность U точки x, не пересекающаяся с этим компактом. Окрестность U удовлетворяет условию (2).

Для каждой точки $x \in X$ проведем вышеописанную конструкцию и покроем X соответствующими окрестностями U_x. Из этого покрытия выделим конечное подпокрытие $U_1, \dots, U_s$ и построим подчиненное ему разбиение единицы $\varphi_1, \dots, \varphi_s$.

Пусть $f\in C(Y)$. Тогда $f=\sum_{l=1}^{s}(\varphi_l\circ\pi)\cdot f$. Покажем, что каждое из слагаемых $(\varphi_l\circ\pi)\cdot f$ представимо в виде полинома от $f_1,\ldots,f_m$ с коэффициентами из $C(X)$. Пусть $U=U_l$, $\operatorname{supp}\varphi_l\subset U$. Выберем функции $g_1,\ldots,g_n$ из $C(X)$ такие, что $f=g_j\circ\pi$ на $W_j\cap\pi^{-1}(U)$. Тогда $f=$ $=\sum_{j=1}^{n}p_j(f_1,\ldots,f_m)\cdot(g_j\circ\pi)$ на $\pi^{-1}(U)$. Но тогда на всем Y имеем $(\varphi_l\circ\pi)\cdot f=\sum_{j=1}^{n}(\varphi_l\circ\pi)(g_j\circ\pi)p_j(f_1,\ldots,f_m)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть выбраны функции $f_1,\ldots,f_m$ из $C(Y)$ и существует точка $y_0\in Y$, не обладающая регулярной окрестностью. Тогда найдется функция $f\in C(Y)$, не представимая в виде полинома от $f_1,\ldots,f_m$ с коэффициентами из $C(X)$.*

Доказательство. Если найдутся точки $y_1, y_2\in Y$ такие, что $\pi(y_1)=\pi(y_2)$ и $f_i(y_1)=f_i(y_2)$ для всех $i=1,\ldots,m$, достаточно выбрать функцию f, разделяющую точки y_1 и y_2. Далее будем считать, что функции $f_1,\ldots,f_m$ разделяют в совокупности точки множества $\pi^{-1}(x)$ для каждого данного $x\in X$.

Переходя, если необходимо, к функциям $f_i(y)-f_i(y_0)$, считаем, что $f_i(y)=0$ при всех $i=1,\ldots,m$.

Будем строить индукцией по n тройки окрестностей U_n, V_n, W_n, удовлетворяющих следующим требованиям:

1) U_n, V_n, W_n попарно не пересекаются;

2) $U_n\supset V_{n+1}\cup W_{n+1}$;

3) $\sup_i|f_i(y)|<\frac{1}{n}$ при $y\in U_n$.

4) существуют такие $y_n\in V_n$, $z_n\in W_n$, что $\pi(y_n)=\pi(z_n)$.

В качестве U_n надо брать окрестность точки y_0, удовлетворяющую условию 3. Поскольку y_0 не обладает регулярной окрестностью, найдутся точки y_{n+1}, $z_{n+1}\in U_n$ такие, что $\pi(y_{n+1})=\pi(z_{n+1})$, $y_{n+1}\neq z_{n+1}$.

Рассмотрим компакт $K=\overline{\{y_1, y_2,\ldots, z_1, z_2,\ldots\}}$. Заметим, что точки y_n, z_n дискретны в относительной топологии K. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, где $a_n=\sup_i|f_i(y_n)-f_i(z_n)|$. Согласно предположению, сделанному в начале доказательства, функции f_i разделяют точки прообраза $\pi^{-1}(x)$ для каждого $x\in X$, поэтому $a_n>0$. Из условий 2—4 следует, что последовательность $\{a_n\}$ сходится к нулю. Определим функцию f на K следующим образом: $f(y_n)=\sqrt{a_n}$, $f=0$ в остальных точках K. В дискретных точках y_n, z_n функция f непрерывна. Пусть $y\in K\setminus\{y_1, y_2,\ldots z_1, z_2,\ldots\}$. Тогда $f(y)=0$ и найдется окрестность V точки y такая, что $y_k\notin V$ при $k<n$. Поэтому для всех $z\in V$ имеем $f(z)<\frac{1}{n}$ и, следовательно, f непрерывна на K. Продолжим функцию f на весь компакт Y по непрерывности. Предположим, что нашелся полином p с коэффициентами из $C(X)$ такой, что $f=p(f_1, \ldots, f_m)$. Тогда имеем

$$\sqrt{a_n}=f(y_n)-f(z_n)=p(f_1, \ldots, f_m)(y_n)-p(f_1, \ldots, f_m)(z_n)=$$
$$=(f_1(y_n)-f_1(z_n))Q_1(y_n, z_n)+\ldots+(f_m(y_n)-f_m(z_n))Q_m(y_n, z_n),$$

где $Q_i(y, z)=q_i(f_1(y), \ldots, f_m(y), f_1(z), \ldots, f_m(z))$ и q_i—многочлен с коэффициентами из $C(X)$.

Поскольку $Q_i(y, z)$ ограничена на $Y\times Y$, имеет место оценка $\sqrt{a_n}=|(f_1(y_n)-f_1(z_n))Q_1(y_n, z_n)+\ldots+(f_m(y_n)-f_m(z_n))Q_m(y_n, z_n)|<Ca_n$. Но поскольку $a_n>0$ для всех n и $\{a_n\}$ сходится к нулю, при больших n оценка не выполняется, что приводит к противоречию. Лемма доказана.

2°. Из лемм 1—3 немедленно следует

Теорема 4. *Алгебра $C(Y)$ является полиномиальным расширением алгебры $C(X)$ тогда и только тогда, когда существует регулярное отображение π из Y в X.*

Пусть B—коммутативная банахова алгебра, являющаяся полиномиальным расширением алгебры $C(X)$. Пусть M_B—пространство максимальных идеалов алгебры B, π—естественная сюръекция M_B на X, двойственная вложению Φ из диаграммы (1) и $\hat{B}$—преобразование Гельфанда алгебры B.

Теорема 5. *Преобразование Гельфанда $\hat{B}$ алгебры B совпадает с алгеброй $C(M_B)$ всех непрерывных функций на M_B тогда и только тогда, когда сюръекция π регулярна.*

Воспользовавшись теоремой 5 и результатами Линдберга [2,3], можно доказать следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть B является расширением Аренса—Гофмана [4] алгебры $C(X)$, ассоциированным с полиномом $\alpha(t)$. Для того чтобы $\hat{B}=C(M_B)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $x_0\in X$ нашлась бы такая ее окрестность U, что*

$$\alpha(t)(x)=\prod_i(t-\lambda_i(x))^{m_i} \tag{3}$$

для $x\in U$ и некоторых непрерывных на U функций $\lambda_i(x)$ таких, что $\lambda_i(x)\neq\lambda_j(x)$ для всех $x\in U$ и всех $i\neq j$.

Отметим, что если хотя бы один из показателей m_i в формуле (3) больше единицы, то алгебра B будет иметь нетривиальный радикал.

В заключение приведем пример, иллюстрирующий применение полученных результатов.

Пример. Существует такая полупростая банахова алгебра B, что $M_B=X_1\cup X_2$, где X_1, X_2—компакты, $X_1\cap X_2$ состоит из одной точки, $\hat{B}|_{X_1}=C(X_1)$, $\hat{B}|_{X_2}=C(X_2)$, причем $\hat{B}\neq C(M_B)$.

Автор выражает глубокую признательность С. А. Григоряну за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

Вычислительный центр
Госплана Армянской ССР

Ա. Վ. ԿԱՐԱԹԵԳՈՎ

$C(X)$-ի պոլինոմիալ ընդլայնումների մասին

Դիցուք A-ն և B-ն կոմուտատիվ ունիտալ բանախյան հանրահաշիվներ են։ Ասենք, որ B-ն A հանրահաշվի պոլինոմիալ ընդլայնումն է, եթե գոյություն ունի միավորը պահպանող ինյեկտիվ Φ հոմոմորֆիզմ A-ից B այնպես, որ՝

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "I"'] & B \arrow[d, "\Psi"] \\ A[x_1, \ldots, x_n] & \arrow[l] \end{tikzcd}$$

դիագրաման կոմուտատիվ է, որտեղ I-ն A հանրահաշվի բնական ներդրումն է A-ից գործակիցներով $x_1, \ldots, x_n$ անհայտից կախված բազմանդամների հանրահաշվի մեջ, իսկ Ψ-ն որևէ էպիմորֆիզմ է։

Դիցուք $C(X)$ և $C(Y)$ X և Y կոմպակտի վրա բոլոր անընդհատ ֆունկցիաների բանախյան հանրահաշիվներ են։ Ամեն մի $C(X)$-ը $C(Y)$-ի մեջ հոմոմորֆ ներդրմանը համապատասխանում է $\pi: Y \to X$ սյուրեկցիա։

π սյուրեկցիան կանվանենք ռեգուլյար, եթե $y \in Y$ ցանկացած կետը ունի այնպիսի V շրջակայք, որ $\operatorname{card} V \cap \pi^{-1}(x) \leqslant 1$ ցանկացած $x \in X$ համար։

Թեորեմ։ $C(Y)$ հանրահաշիվը կլինի $C(X)$ հանրահաշվի պոլինոմիալ ընդլայնում այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $\pi: Y \to X$ ռեգուլյար սյուրեկցիա:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. А. Григорян*, УМН, т. 39, вып. 1 (235) (1984). [2] *J. A. Lindberg*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 112, №2 (1964). [3] *J. A. Lindberg*, Pacific J. Math., v. 14 (1964). [4] *R. Arens, K. Hoffman*, Proc. Amer. Math. Soc., v. 7 (1956). [5] *Дж. Л. Келли*, Общая топология, Наука, М., (1981).