

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Т. Э. Пилипосян

О планарно реализуемых гиперграфах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшавовым 30/XI 1984)

Пусть на множестве вершин* X заданы гиперграф $H=(X, \mathcal{E})$ и граф $G=(X, U)$ со множествами ребер $\mathcal{E}$ и U соответственно. Скажем, что граф G является реализацией гиперграфа H , если для любого ребра $E \in \mathcal{E}$ подграф $\langle E \rangle_G$, порожденный множеством вершин $E \subseteq X$, является связным. Гиперграф, имеющий планарную реализацию, назовем планарно реализуемым (или планарным⁽³⁾).

Ясно, что любой граф (если его рассмотреть как гиперграф) сам является для себя реализацией и, следовательно, непланарный граф не может быть планарно реализуемым. В частности $K_{3,3}$, имеющий девять ребер, не является планарно реализуемым.

Наша цель найти то наименьшее целое число q , при котором все гиперграфы с не более чем q ребрами являются планарно реализуемыми. Из вышесказанного следует, что $q < 9$. Известно⁽³⁾, что $q \geq 6$. Мы покажем, что $q=8$, т. е. докажем, что имеет место следующая теорема.

Теорема. Всякий гиперграф с не более чем восьмью ребрами является планарно реализуемым.

Прежде чем доказать теорему, введем несколько обозначений и докажем вспомогательные утверждения.

Для множества $A \subset X$ через H_A обозначим подгиперграф гиперграфа $H=(X, \mathcal{E})$, порожденный теми его ребрами, которые не инцидентны вершинам из A . Количество ребер гиперграфа H , инцидентных вершине $x \in X$, обозначим через $d_H(x)$ и назовем степенью вершины x в H . Наибольшую из степеней вершин гиперграфа H обозначим через $\Delta(H)$. Гиперграф назовем интервальным, если его можно реализовать простой цепью.

Утверждение 1. Если гиперграф имеет три ребра и два из них между собой не смежны, то он является интервальным. Если каждая компонента гиперграфа содержит не более двух ребер, то он является интервальным.

Утверждение 2. Если в гиперграфе можно выделить одну или две вершины таким образом, чтобы подгиперграф, порожденный остальными (не инцидентными выделенным вершинам) ребрами, стал интервальным, то гиперграф планарно реализуем.

Доказательство. Действительно, планарную реализацию та-

* Все не приведенные здесь определения можно найти в (1) и (2).

кого гиперграфа можно построить, соединив каждую из выделенных вершин с вершинами, которые смежны с ней в гиперграфе, и построив соответствующую простую цепь на множестве вершин интервального подгиперграфа (рис. 1).

Доказательство теоремы. Пусть H гиперграф с 8 ребрами E_i , где $i \in \overline{1, 8}$ и $X = \bigcup_{i=1}^8 E_i$. Рассмотрим следующие возможные случаи:

1) $\Delta(H) \geq 4$; 2) $\Delta(H) = 3$; 3) $\Delta(H) = 2$.

Случай 1. $\Delta(H) \geq 4$. Пусть $d_H(x) = \Delta(H)$, где $x \in X$. Если $\Delta(H_{\{x\}}) \leq 1$, то $H_{\{x\}}$ является интервальным и, следовательно, H — планарно реализуемым (рис. 1, б). Если $\Delta(H_{\{x\}}) \geq 2$ и $d_{H_{\{x\}}}(y) = \Delta(H_{\{x\}})$, то $H_{\{x,y\}}$ имеет не более двух ребер и является интервальным. Значит H планарно реализуем (рис. 1, а).

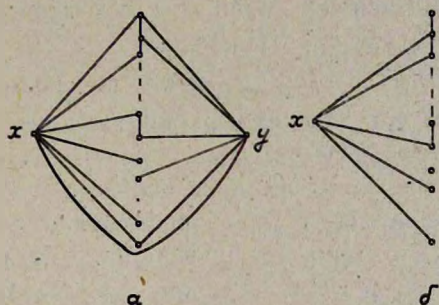


Рис. 1

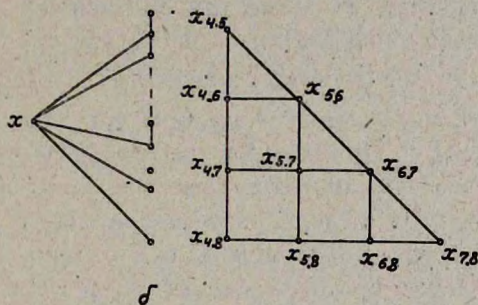


Рис. 2

Случай 2. $\Delta(H_{\{x\}}) = 3$. Здесь возможны несколько подслучаев. (2.1). В H можно выделить вершину x , где $d_H(x) = \Delta(H)$, таким образом, чтобы $\Delta(H_{\{x\}}) = 3$.

Доказательство планарно реализуемости H в этом случае аналогично доказательству случая 1.

(2.2). Для любой вершины x с максимальной степенью в H $\Delta(H_{\{x\}}) = 2$, и этот x можно выбрать таким образом, чтобы среди пяти ребер гиперграфа $H_{\{x\}}$ нашлась хотя бы одна пара несмежных.

Пусть x уже выбрали и в $H_{\{x\}}$ несмежными являются ребра E и F .

Если среди остальных ребер K, L, M гиперграфа $H_{\{x\}}$ имеются смежные, то возьмем любую вершину y , инцидентную двум из них. Тогда из трех ребер $H_{\{x,y\}}$ два неинцидентны (именно E и F) и, согласно утверждению 1, $H_{\{x,y\}}$ является интервальным. По утверждению 2 H планарно реализуем.

(2.3). Для любой вершины x с максимальной степенью в H $\Delta(H_{\{x\}}) = 2$, и произвольные два из пяти ребер гиперграфа $H_{\{x\}}$ смежны.

Пусть x — некоторая такая вершина. Без ограничения общности предположим, что она инцидентна с ребрами E_1, E_2, E_3 . Возможны два случая.

(2.3.1). Существуют числа i_0, j_0 , где $4 \leq i_0 < j_0 \leq 8$, такие, что для любого $k \in \overline{1, 3}$ $E_{i_0} \cap E_{j_0} \cap E_k = \emptyset$.

Перенумеруем ребра H таким образом, чтобы $i_0=5$, $j_0=7$. Выберем из множеств $E_l \cap E_j$, где $l, j \in \overline{4, 8}$, по одному элементу $x_{l,j}$ и построим граф $\bar{G}$ (рис. 2). Дополним $\bar{G}$ до реализации G для H , указав плоскую укладку графа G .

Все вершины множества $E_l \cap E_j$, где $l, j \in \overline{4, 8}$, соединим с вершиной $x_{l,j}$ и разместим во внешней грани графа $\bar{G}$ около вершины $x_{l,j}$, кроме вершин множества $E_5 \cap E_7$, которые разместим в одной из смежных $x_{5,7}$ граней (например в треугольнике $x_{5,8}$, $x_{5,7}$, $x_{6,7}$). Кроме того, все неразмещенные на плоскости вершины, инцидентные с одним из ребер E_4 и E_8 , разместим во внешней грани $\bar{G}$ около вершины $x_{4,8}$ и подсоединим с ней. Неразмещенные вершины, инцидентные с E_l , где $l=5, 6, 7$, разместим около вершины $x_{4,l}$ (также во внешней грани $\bar{G}$) и соединим с $x_{4,l}$. Вершину x и все остальные неразмещенные вершины H разместим во внешней грани $\bar{G}$ и x подсоединим со всеми вершинами множества $E_1 \cup E_2 \cup E_3$. Поскольку $E_5 \cap E_7 \cap E_l = \emptyset$, $l \in \overline{1, 3}$, то все вершины множества $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ лежат во внешней грани $\bar{G}$, и полученный граф G будет плоским. G будет также реализацией для H . Действительно, подграфы $\langle E_l \rangle_G$, где $l=1, 2, 3$, связаны, поскольку они содержат остовную звезду с центром x . Подграф $\langle E_4 \rangle_G$ связан, поскольку его вершины либо принадлежат цепи $x_{4,5}$, $x_{4,6}$, $x_{4,7}$, $x_{4,8}$, либо смежны в G с одной из ее вершин. То же самое имеет место и для множества E_5 и цепи $x_{4,5}$, $x_{5,6}$, $x_{5,7}$, $x_{5,8}$, множества E_6 и цепи $x_{4,6}$, $x_{5,6}$, $x_{6,7}$, $x_{6,8}$, множества E_7 и цепи $x_{4,7}$, $x_{5,7}$, $x_{6,7}$, $x_{7,8}$, множества E_8 и цепи $x_{4,8}$, $x_{5,8}$, $x_{6,8}$, $x_{7,8}$.

(2.3.2). Для любых i, j , где $4 \leq i < j \leq 8$, существует $k \in \overline{1, 3}$ такое, что $E_i \cap E_j \cap E_k \neq \emptyset$.

Сначала докажем, что этот k один-единственный для всех пар i, j , т. е. существует $k \in \overline{1, 3}$ такое, что для любых чисел i, j, p , где $4 \leq i < j \leq 8$ и $k \in \overline{1, 3}$, множество $E_i \cap E_j \cap E_p$ пусто при $p \neq k$, и непусто при $p = k$.

Заметим, что не могут существовать шесть попарно различных индексов i, j, r, m, n, p таких, что $E_i \cap E_j \cap E_r \neq \emptyset$ и $E_m \cap E_n \cap E_p \neq \emptyset$, поскольку имело бы место (2.1) (для вершины $u \in E_i \cap E_j \cap E_r$ имели бы $\Delta(H) = 3$, $\Delta(H_{(x)}) = 3$). На этом и основано доказательство единственности k .

Пусть для $i, j \in \overline{4, 8}$ и $k \in \overline{1, 3}$, $E_i \cap E_j \cap E_k \neq \emptyset$, и пусть $m, n \in \overline{4, 8}$, $p \in \overline{1, 3}$. Докажем, что $E_m \cap E_n \cap E_p \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $p = k$.

Предположим обратное, т. е. $k \neq p$, но $E_m \cap E_n \cap E_p \neq \emptyset$. Случай $n = i$ и $m = j$ исключается, поскольку тогда для отличных от i и j чисел l и t , где $4 \leq l < t \leq 8$, множество $E_l \cap E_t$ не может пересекаться ни с одним из множеств E_1, E_2, E_3 (так как $E_l \cap E_j$ пересекается с двумя из них), что соответствует (2.3.1). Предположим, что из чисел m, n, i, j два совпадают, например $n = i$, $m \neq j$. Тогда для остальных (отличных от m, i, j) чисел l и t множества $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ множество $E_l \cap E_t$ также не может пересекаться ни с одним из мно-

жеств E_1, E_2, E_3 (поскольку $E_i \cap E_j \cap E_k \neq \emptyset, E_i \cap E_m \cap E_p \neq \emptyset$, то при $E_i \cap E_j \cap E_d \neq \emptyset$, где $d \in \overline{1, 3}$, имел бы место случай 2), что соответствует (2.3.1). Аналогичным образом получим противоречие при $i \neq n, j \neq m$. Полученные противоречия показывают, что $k=p$.

Без ограничения общности предположим, что $k=1$, т. е. $E_i \cap E_j \cap E_1 \neq \emptyset$, а $E_i \cap E_j \cap E_2 = E_i \cap E_j \cap E_3 = \emptyset$ при всех $4 \leq i < j \leq 8$. Из всех множеств $E_i \cap E_j \cap E_1$ выберем по одной вершине $x_{i,j}$ и построим граф $\tilde{G}$ (рис. 2). Все остальные построения сделаем таким же образом, как и в случае 2.3.1, с той лишь разницей, что вершину x не будем соединять с вершинами множества $E_5 \cap E_7 \cap E_1$ (они лежат во внешней грани $\tilde{G}$). Полученный граф G плоский, кроме того он является реализацией для H . Связность подграфов $\langle E_i \rangle_G$, где $i \in \overline{2, 8}$, доказывается так же, как и в (2.3.1). Связность подграфа $\langle E_1 \rangle_G$ следует из того, что все вершины, принадлежащие E_1 , в G смежны либо с x , либо с одной из вершин $x_{i,j}$, которые, в свою очередь, принадлежат E_1 и все, кроме $x_{5,7}$, смежны с вершиной x .

Случай 3. $\Delta(H)=2$.

(3.1). В H можно выбрать четыре вершины x, y, z, u таким образом, чтобы каждое ребро было инцидентно хотя бы одному из них.

Граф G построим, соединив каждую из вершин x, y, z, u со смежными с ней в H вершинами. В полученном графе степени всех вершин, кроме x, y, z, u , не больше двух, поскольку в H каждая вершина инцидентна не более чем двум ребрам. По теореме Понтрягина—Куратовского этот граф планарен, поскольку он не может содержать подграфов, гомеоморфных $K_{3,3}$ или K_5 (в $K_{3,3}$ имеются 6 вершин степени больше двух, в K_5 — 5, а в G — 4).

(3.2). В H можно выбрать три вершины x, y, z таким образом, чтобы им были инцидентны 6 ребер гиперграфа H , но как бы ни выбрали эти вершины, остальные два ребра гиперграфа H не будут смежными.

Из этих (остальных) двух ребер выберем по одной вершине u и v . Реализацию для H построим, соединив ребром каждую из вершин x, y, z, u, v со смежными с ней в H вершинами. В полученном графе могут быть только 5 вершин степени больше двух. Значит он не может содержать подграфа, гомеоморфного $K_{3,3}$. Докажем, что он не может содержать и подграфа, гомеоморфного K_5 . Действительно, в гомеоморфном K_5 подграфе любую пару из пяти вершин K_5 можно соединять цепью, которая не проходит ни через одну из остальных трех вершин, т. е. проходит только через вершины степени два. В нашем же случае цепь, соединяющая вершины u и v , должна проходить через одну из вершин x, y, z , поскольку ребра гиперграфа, из которых выбраны u и v , не смежны в H и не существует вершины w , которая была бы смежна в графе и с u , и с v .

(3.3). В гиперграфе H можно выбрать пару вершин x, y таким образом, чтобы $d_H(x) = \Delta(H) = 2, d_{H_{\{x\}}}(y) = 2 = \Delta(H_{\{x\}})$, но как бы ни выбрали эти вершины x и $y, \Delta(H_{\{x,y\}}) = 1$.

Теперь, как и в (3.4), когда как бы ни выбрали вершину x , для которой $d_H(x) = \Delta(H) = 2$, для гиперграфа H_x $\Delta(H_x) = 1$, планарно реализуемость гиперграфа H следует из утверждений 1 и 2.

Теорема доказана.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Տ. Է. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ

Հարթ իրացնելի հիպերգրաֆների մասին

Դիցուք G գրաֆը և H հիպերգրաֆն ունեն գագաթների նույն բազմությունը: Կասենք, որ G հանդիսանում է H իրացում, եթե H -ի ցանկացած կողին պատկանող գագաթների բազմությունը G -ում ծնում է կապակցված ենթագրաֆ: Հարթ իրացում ունեցող գրաֆը կոչվում է հարթ իրացնելի:

Պարզ է, որ ամեն մի գրաֆ (եթե այն դիտարկենք նաև որպես հիպերգրաֆ) ինքն իրեն համար հանդիսանում է իրացում: Հետևաբար ոչ հարթ գրաֆը չի կարող լինել հարթ իրացնելի: Մասնավորապես, ինքը կող ունեցող $K_{3,3}$ գրաֆը հարթ իրացնելի չէ: Մեր նպատակն է գտնել այն ամենափոքր q ամբողջ թիվը, որ q -ից ոչ ավելի թվով կողեր ունեցող ցանկացած հիպերգրաֆ լինի հարթ իրացնելի: Վերը նշվածից հետևում է, որ $q < 9$: ⁽¹⁾-ում ցույց է տրված, որ $q \geq 6$: Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է, որ $q = 8$, այսինքն, ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ. Ութից ոչ ավելի կողեր ունեցող ցանկացած հիպերգրաֆ իրացնելի է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Փ. Харари, Теория графов, Мир, М., 1973. ² C. Berge, Graphes et hypergraphes, Dunod, Paris, 1970. ³ А. А. Волошина, В. З. Фейнберг, ДАН БССР, т. 28, № 4 (1984).