

УДК 551.24

ТЕКТОНИКА

Л. С. Казарян

Устойчивость пологой симметричной литосферной оболочки под равномерным давлением

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Т. Асланяном 28/III 1985)

Рассмотрим устойчивость пологой сферической оболочки на упругом основании применительно к литосфере Земли. Предполагается, что оболочка шарнирно оперта по контуру и находится под действием равномерно распределенной нагрузки. Нагрузка может быть собственным весом или любым другим воздействием (электрическим, магнитным, гравитационным и др.), которое на срединной поверхности вызывает равномерно распределенную нагрузку.

В данной статье сделана попытка определить критические значения параметров, при которых возможны несколько состояний статического равновесия, т. е. переход от одного равновесного состояния к другому.

Из теории пологих оболочек известно, что решение поставленной задачи приводится к решению следующих уравнений ^(1,2):

$$\frac{1}{EH} \Delta^2 \Phi + \frac{1}{R} \Delta w = 0;$$

$$D \Delta^2 w - \frac{1}{R} \Delta \Phi + T \Delta w + k w = 0 \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$T_1 = 0, v = 0, w = 0, M_{11} = 0, x = 0, x = a \quad (0 \leq y \leq b),$$

$$T_2 = 0, u = 0, w = 0, M_{22} = 0, y = 0, y = b \quad (0 \leq x \leq a). \quad (2)$$

В системе (1) E —модуль упругости, H —толщина литосферной плиты, R —радиус Земли, D —цилиндрическая жесткость при изгибе, T —сжимающее усилие, k —коэффициент постели, оператор Лапласа. Неизвестные функции $\Phi(x, y)$ и $w(x, y)$ представляют собой соответственно функцию напряжений и прогиб оболочки.

Уравнения (1) получены в предположении о безмоментности начального состояния оболочки, при котором

$$T_1^0 = T_2^0 = \frac{Rq}{2 \left(1 + \frac{kR^2}{EH} \right)} = T, \quad (3)$$

где q —равномерно распределенная нагрузка, действующая на срединной поверхности по направлению нормали.

Решение уравнения (1) с учетом граничных условий (2) представим в виде

$$w(x, y) = W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$\Phi(x, y) = \Phi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1) и исключая функцию напряжений $\Phi(x, y)$, получим

$$\left\{ D\pi^4 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 - \frac{Rq\pi^2}{2 \left(1 + \frac{kR^2}{EH} \right)} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] + \frac{EH}{R^2} + k \right\} W_{mn} = 0.$$

Так как нас интересует нетривиальное решение W_{mn} , то получим

$$D\pi^4 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 - \frac{Rq\pi^2}{2 \left(1 + \frac{kR^2}{EH} \right)} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] + \frac{EH}{R^2} + k = 0.$$

Уравнение (5) отражает связь между параметрами задачи, при которой полая литосферная плита теряет устойчивость.

Фиксируя некоторые параметры, можно получить критические значения для любого из них.

Так, например, для определения критического значения давления с учетом собственного веса выразим q из уравнения (5) через остальные параметры:

$$q = \frac{2D(k+\alpha)\pi^2 x}{R\alpha} + 2 \frac{(k+\alpha)^2}{R\alpha\pi^2 x}; \quad (6)$$

здесь введены обозначения $x = \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}$; $\alpha = \frac{EH}{R^2}$.

Минимизируя по x , т. е. полагая $\frac{dq}{dx} = 0$, находим

$$x = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{k+\alpha}{D}}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5), получим критическое значение давления, при котором полая литосферная оболочка теряет устойчивость:

$$q_{кр} = \frac{4}{R\alpha} (k+\alpha) \sqrt{(k+\alpha)D}. \quad (8)$$

Интенсивность суммарного давления на середину оболочки может состоять из собственного веса на единицу длины q_1 , некоторого внешнего давления q_2 (вес воды и т. д.) и внутреннего давления p , т. е. $q = q_1 + q_2 + p$.

При заданном весе и внешнем давлении критическое давление можно понимать как минимальное значение внутреннего давления, приводящего к потере устойчивости, т. е.

$$P_{кр} = q_1 + q_2 - \frac{4}{R\alpha} (k + \alpha) \sqrt{(k + \alpha)D}. \quad (9)$$

Сжимающие усилия и напряжения, исходя из формулы (3), определяются следующим образом:

$$T = \frac{qR\alpha}{2(k + \alpha)}; \quad \sigma = \frac{qR\alpha}{2H(k + \alpha)}, \quad (10)$$

а их критические значения определяются по формулам:

$$T_{кр} = 2\sqrt{(k + \alpha)D}; \quad \sigma_{кр} = \frac{2}{H} \sqrt{(k + \alpha)D}. \quad (11)$$

Далее, если все параметры известны, кроме коэффициента постели, то из (8) можно определить критическое значение коэффициента постели по формуле

$$k_{кр} = \sqrt[3]{\frac{q^3 R^3 \alpha^3}{16D}} - \frac{EH}{R^2}. \quad (12)$$

Зная критические значения физических величин (давления, напряжения, коэффициента постели и т. д.), по формуле (7) можно определить также максимальные значения геометрических величин пологой оболочки (ширину, длину). Если одну из величин в (7) выразим через другую, т. е. $n = cm$, $b = c_1 a$, то получим:

$$m = \frac{a}{\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{(k + \alpha)D}}{1 + \left(\frac{c}{c_1}\right)^2}}; \quad a = m\pi \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{c}{c_1}\right)^2}{\sqrt{(k + \alpha)D}}}. \quad (13)$$

Итак, из уравнения (5) можно определить значения всех физических и геометрических параметров, при которых происходит потеря устойчивости пологой литосферной плиты.

Используя значения параметров литосферной плиты $H = 70$ км; $\gamma = 3,13 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$; $R = 6371$ км; $E = 0,997 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$; $\nu = 0,25$, при которых жесткость литосферной пологой сферической плиты на изгиб получает значение $D = \frac{EH^3}{12(1 - \nu^2)} = 0,304 \cdot 10^{26}$ кгсм, определим критическое значение коэффициента постели под действием собственного веса по формуле (12) $k = \gamma \left(0,705 \sqrt[3]{\frac{H}{R}} - \frac{1}{2} \frac{H}{R} \right) = 0,465 \text{ г/см}^3$.

Следовательно, при значении коэффициента постели $k = 0,465 \text{ г/см}^3$ пологая литосферная плита под действием собственного веса теряет устойчивость.

Институт геологических
наук Академии наук
Армянской ССР

Ֆածրանիստ սիմետրիկ լիթոսֆերային թաղանթի կայունությունը
ճավասարաչափ ճնշման տակ

Ստացված է անկողնային գործակցի կրիտիկական արժեքը որոշող բանաձևեր, որի դեպքում հավասարաչափ բեռնավորված լիթոսֆերային թաղանթը կորցնում է կայունությունը:

Ընկած է գործակցի կրիտիկական թվային արժեքը որոշակի հաստոթյուն և մեխանիկական հատկություններ ունեցող թաղանթի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Прочность. Устойчивость. Колебания. Т. 3. Справочник в трех томах. Машиностроение, М., 1968. ² В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев, Балки, плиты и оболочки на упругом основании. Гос. изд-во физ.-мат. лит., М., 1960. ³ А. Т. Асланян, Изв. АН АрмССР. Науки о Земле, т. 36, № 4 (1983).