ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1986 2

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Д. О. Мурадян

Полиномиальный алгоритм для нахождения минимаксных нумераций графов интервалов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 8/X 1984)

Рассмотрим граф $G=(X, U)$ со множеством вершин $X(|X|=p)$ и ребер U, и каждое взаимно-однозначное отображение $\varphi: X\to\{1, 2, \ldots, p\}$ назовем его нумерацией. При этом число $|\varphi(x)-\varphi(y)|$ назовем длиной ребра (x, y), а числа $\max\limits_{(x,y)\in U}|\varphi(x)-\varphi(y)|$ и $\min\limits_{\varphi}\max\limits_{(x,y)\in U}|\varphi(x)-\varphi(y)|$, где минимум берется по всевозможным нумерациям графа G, —соответственно высотой нумерации φ и графа G. Нумерацию, имеющую наименьшую высоту, назовем минимаксной.

Задача определения высоты произвольного графа принадлежит к числу „трудных" задач. Она остается NP-полной даже в случае деревьев с максимальной степенью вершин, равной трем ([1]).

В настоящей работе за полиномиальное время задача решается для графов интервалов (граф интервалов есть граф пересечений некоторого семейства интервалов, заданного на числовой прямой). Алгоритм имеет сложность $O(\Delta^2 p\log_2\Delta)$, где Δ—максимальная степень вершин графа.

Все неопределяемые в работе понятия о графах взяты из книги Ф. Харари ([2]).

Приведем алгоритм, который для произвольного графа интервалов G и числа h либо строит нумерацию с высотой h, либо утверждает, что высота графа G больше h. Алгоритм начинает работу с конкретной нумерации графа и на каждом шаге переставляет ряд „смежных множеств". С целью сделать описание алгоритма более содержательным дадим несколько определений.

Для графа $G=(X, U)$ и его нумерации φ определим нумерацию $\varphi_{A,B}$—перестановку множеств A и B: если A и B непересекающиеся подмножества вершин графа G, причем для любых $x\in A$ и $y\in B$ имеет место $\varphi(x)<\varphi(y)$ и $\max\limits_{x\in B}\varphi(x)-\min\limits_{x\in A}\varphi(x)=|A|+|B|-1$, то

$$\varphi_{A,B}(x)=\begin{cases}\varphi(x)/x\in X\setminus(A\cup B)\\ \varphi(x)+|B|/x\in A\\ \varphi(x)-|A|/x\in B\end{cases}$$

Обозначим $X^{\varphi}_{k,l}=\{\varphi^{-1}(k), \varphi^{-1}(k+1), \ldots, \varphi^{-1}(l)\}$ при $1\leq k\leq l\leq p$.

Рассмотрим граф интервалов $G=(X, U)$. Интервал, соответствующий вершине $x\in X$, обозначим через $\hat{x}$.

Определим нумерацию φ_0 графа G. Если $(a, b)\in U$, то $\varphi_0(a) < \varphi_0(b)$, если правый конец $\hat{a}$ находится левее левого конца $\hat{b}$. При $(a, b)\in U$ имеет место $\varphi_0(a)<\varphi_0(b)$, если либо существует вершина c такая, что $(c, a)\in U$, $(c, b)\in U$ и $\varphi_0(c)<\varphi_0(b)$, либо существует вершина d такая, что $(d, a)\in U$, $(d, b)\in U$ и $\varphi_0(a)<\varphi_0(d)$. Если же $(a, b)\in U$ и вершины a, b имеют одинаковое множество смежных (не считая самих себя), то имеет место либо $\varphi_0(a)<\varphi_0(b)$, либо $\varphi_0(b)<\varphi_0(a)$.

Число $\varphi_0(x)$ назовем индексом вершины x.

Перейдем теперь к описанию алгоритма.

i-ый шаг ($i\geqslant 1$). На i-ом шаге алгоритм, работая над нумерацией $\varphi=\varphi_{i-1}$, строит нумерацию φ_i, либо останавливается, утверждая, что высота графа G больше h.

Пусть y—вершина с наибольшим номером (при φ), инцидентная ребру с длиной больше h, и пусть (x, y)—длиннейшее из них (т. е. вершина y не смежна с вершинами, номера которых меньше $\varphi(x)$). Ищем вершину z с наименьшим номером из $X^{\varphi}_{\varphi(x)+1,\,\varphi(y)-1}$, несмежную с y. Если такой вершины нет, то утверждаем, что высота графа G больше h.

Пусть z—искомая вершина. Обозначим $M=X^{\varphi}_{\varphi(x),\,\varphi(z)-1}$. Пусть a_j—вершина множества $M\setminus X^{\varphi}_{\varphi(a_{j-1}),\,\varphi(z)-1}$ (договоримся, что $X^{\varphi}_{\varphi(a_0),\,\varphi(z)-1}=\varnothing$) с наибольшим индексом. Обозначим $S_j=X^{\varphi}_{\varphi(a_j)+1,\varphi(a_{j-1})-1}$ (для некоторых j множества S_j могут оказаться пустыми).

Нумерация φ_i определяется следующим образом:

$$\varphi_i(a)=\begin{cases}\varphi_{i-1}(x)/a=z\\ \varphi_{i-1}(a)/a\in\bigcup\limits_j S_j\cup(X\setminus(M\cup\{z\}))\\ \varphi_{i-1}(a)+1+|S_j|\setminus a=a_j\end{cases}$$

Другими словами: φ_i получается из φ_{i-1} последовательными перестановками множеств $(M, \{z\})$, $(\{a_1\}, S_1)$, $(\{a_2\}, S_2)$, ... и т. д.

Далее проверяем, имеется ли при φ_i ребро с длиной больше h; если нет, то алгоритм останавливается, в противном случае — переходит к $(i+1)$-ому шагу.

Доказывается корректность и полиномиальная сложность алгоритма. Приведенный алгоритм имеет сложность $O(\Delta_p^2)$. Учитывая, что высота графа интервалов G принимает значение из промежутка $\overline{\Delta/2, \Delta}$, можно построить алгоритм со сложностью $O(\Delta^2 p\log_2\Delta)$, находящий минимаксную нумерацию графа G.

Республиканский информационный вычислительный центр (РИВЦ)
Министерства здравоохранения АрмССР

Դ. Հ. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

Պոլինոմիալ բարդությամբ ալգորիթմ՝ ինտերվալ գրաֆների մինիմաքս համարակալումները գտնելու համար

Դիցուք $G=(X, U)$-ն *գրաֆ է* $X(|X|=p)$ *գագաթների և* U *կողերի բազմությամբ։ Յուրաքանչյուր* $\varphi: X\to\{1, 2, \ldots, p\}$ *փոխմիարժեք համա-*

պատասխանություն կոչվում է G գրաֆի համարակալում, և մինիմաքս է կոչվում այն համարակալումը, որ մինիմիզացնում է $\max\limits_{(x,y)\in U}|\varphi(x)-\varphi(y)|$ ֆունկցիոնալը։

Աշխատանքում բերվում է ինտերվալ գրաֆների համար մինիմաքս համարակալումներ կառուցող ալգորիթմ (ինտերվալ գրաֆը սահմանվում է որպես թվային առանցքի վրա տրված ինտերվալների ինչ-որ ընտանիքի հատումների գրաֆ)։ Ալգորիթմի բարդությունը ունի $\Delta^2 p \log_2 \Delta$ կարգը, որտեղ Δ-ն գրաֆի գագաթների մեծագույն աստիճանն է։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Гэри, Д. Джонсон,* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи, Мир, М., 1982. [2] *Ф. Харари,* Теория графов, Мир, М., 1973.