УДК 512.4

МАТЕМАТИКА

Г. С. Микаелян

К силовской теории бесконечных групп

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 2/Х 1984)

1. В работах ^(1,2) при решении задачи, в некотором смысле обратной известной теореме Силова о сопряженности максимальных p -подгрупп конечных групп, показывается, что замкнутыми по подгруппам нетривиальными классами конечных групп, обладающими тем свойством, что в каждой конечной группе максимальные подгруппы из этих классов сопряжены, являются только классы конечных p -групп по всевозможным простым числам p . При этом рассматривается сопряженность как относительно внутренних, так и произвольных автоморфизмов.

В настоящей работе аналогичная задача решается для различных классов бесконечных групп. Сначала приведем необходимые определения.

2. Под классом групп будем понимать абстрактный класс групп — класс групп, содержащий единичную группу и вместе с каждым своим элементом все его изоморфные. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется s -замкнутым, если каждая подгруппа $\mathfrak{X}$ -группы является $\mathfrak{X}$ -группой.

Определение. Класс групп $\mathfrak{X}$ назовем силовски (автоморфно силовски, локально силовски) правильным в классе $\mathcal{Y}$, если для каждой $\mathcal{Y}$ -группы G и любых ее $\mathfrak{X}$ -подгрупп A и B существует внутренний автоморфизм (соответственно автоморфизм, локально внутренний автоморфизм) φ группы G такой, что

$$gp(A, B^\varphi) \in \mathfrak{X}.$$

Класс групп $\mathfrak{X}$ назовем правильным в классе $\mathcal{Y}$, если в каждой $\mathcal{Y}$ -группе любые две $\mathfrak{X}$ -подгруппы порождают $\mathfrak{X}$ -подгруппу.

Ясно, что для всякого класса $\mathcal{Y}$ сам $\mathcal{Y}$ и единичный класс являются силовски правильными (и, следовательно, автоморфно силовски и локально силовски правильными). Эти классы будем называть тривиальными автоморфно силовски правильными подклассами в классе $\mathcal{Y}$.

Теоремы Силова и Ф. Холла (см. ⁽³⁾) показывают, что классы конечных p -групп (p — любое простое число) и конечных разрешимых Π -групп (Π — любое множество простых чисел) являются силовски правильными в классах конечных и конечных разрешимых групп соответственно. В ⁽¹⁾ и ⁽²⁾ показано, что в указанных классах не существует других нетривиальных s -замкнутых силовски правильных подклассов.

3. Рассмотрим силовски правильные классы в классе всех групп. Пусть α — произвольное кардинальное число. Обозначим через $\mathfrak{X}_\alpha(Y_\alpha)$ класс всех групп, мощность которых не превосходит α (соответственно меньше α).

Теорема 1. Классы $\mathfrak{X}_\alpha$ и Y_α для любых бесконечных кардинальных чисел α и β , кроме первого бесконечного кардинального числа в роли β , и только они являются нетривиальными s -замкнутыми силовски правильными классами в классе всех групп.

В следующей теореме (и в некоторых следующих) предполагается замкнутость тем или иным образом правильных классов относительно объединения возрастающей цепочки своих подгрупп (короче u -замкнутость). Такое ограничение естественно в том смысле, что оно в условиях s -замкнутости эквивалентно вложимости каждой подгруппы из этих классов в некоторую максимальную подгруппу из тех же классов.

Теорема 2. s , u -замкнутые силовски правильные классы в классе всех групп тривиальны.

4. Одним из тех классов бесконечных групп, где успешно строится аналог теоремы Силова, является класс локально нормальных групп. Известно (см. (4,5)), что в этом классе, а также в классе FC -групп максимальные p -подгруппы локально сопряжены, т. е. подклассы указанных классов, составленные из p -групп (p — любое простое число), являются локально силовски правильными.

В первой из следующих двух теорем обращаются эти результаты, а во второй — показывается, что в указанных классах не существуют s , u -замкнутые силовски правильные подклассы, т. е. на группы из этих классов нельзя перенести теорему Силова в смысле сопряженности.

Теорема 3. Нетривиальный s , u -замкнутый, локально силовски правильный подкласс в классе локально нормальных групп совпадает с классом локально нормальных p -групп для некоторого простого числа p , а в классе FC -групп — с подклассом, составленным из всех p -групп для некоторого простого числа p , или же с классом локально нормальных групп.

Теорема 4. s , u -замкнутый силовски правильный подкласс в классе локально нормальных групп тривиален, s в классе FC -групп либо тривиален, либо совпадает с классом локально нормальных групп.

5. В работе (6) показано, что в произвольной периодической линейной группе над любым полем максимальные p -подгруппы сопряжены, т. е. классы линейных p -групп для всех простых p являются силовски правильными в классе периодических линейных групп. Следующая теорема показывает, что при некоторых ограничениях эти классы единственные, обладающие указанным свойством.

Теорема 5. Нетривиальный s , u -замкнутый силовски правильный подкласс в классе периодических групп над фиксированным полем F (над всевозможными полями) совпадает с классом

всех линейных p -групп над F (соответственно над всевозможными полями) для некоторого простого числа p .

6. Опишем теперь s , u -замкнутые, автоморфно силовски правильные подклассы в классе абелевых групп.

Пусть Π —произвольное множество простых чисел, f —частичная функция из Π в множество натуральных чисел. Обозначим через $\mathfrak{A}(\Pi, f)$ класс тех и только тех абелевых Π -групп, для канонической формы $p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}$ порядка любого элемента которых справедлива следующая импликация:

$$p_i \in Df \Rightarrow a_i \leq f(p_i), \quad i=1, \dots, n,$$

где Df область определения частичной функции f .

Теорема 6. *Нетривиальными s , u -замкнутыми автоморфно силовски правильными подклассами в классе абелевых, а также периодических абелевых групп являются классы $\mathfrak{A}(\Pi, f)$ для всевозможных Π и f и только они.*

Используя эту теорему, можно описать автоморфно силовски правильные подклассы в классе конечных групп $\mathcal{F}$.

Следствие. Нетривиальными s -замкнутыми автоморфно силовски правильными подклассами в классе конечных абелевых групп являются классы $\mathcal{F} \cap \mathfrak{A}(\Pi, f)$ для всевозможных Π и f и только они.

7. Рассмотрим класс конечно порожденных абелевых групп. Пусть n любое целое неотрицательное число, Π и f определяются как в п.6, $\mathfrak{A}_n(\Pi, f)$ класс тех и только тех конечно-порожденных абелевых групп, размерность которых не превосходит число n , а периодическая часть содержится в классе $\mathcal{F} \cap \mathfrak{A}(\Pi, f)$.

Обозначим также

$$\mathfrak{A}_\infty(\Pi, f) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{A}_n(\Pi, f).$$

Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 7. *Нетривиальный s -замкнутый класс конечно-порожденных абелевых групп тогда и только тогда является автоморфно силовски правильным в классе всех конечно-порожденных абелевых групп, когда для некоторых n , Π и f он совпадает с классом $\mathfrak{A}_n(\Pi, f)$ ($n=\infty, 0, 1, 2, \dots$).*

8. Ясно, что правильные классы являются силовски или автоморфно силовски правильными в любом классе. Обратное, вообще говоря, не обязательно должно иметь место. Однако имеет место.

Теорема 8. *s , u -замкнутые силовски правильные подклассы в классах всех групп, локально нормальных групп и FC-групп являются правильными. Правильными являются также s -замкнутые силовски правильные классы в классе всех групп.*

Теорема 9. *В классах локально нормальных групп и FC-групп силовски правильные s -замкнутые подклассы либо правильны, либо совпадают с одним из классов конечных p -групп для некоторого простого числа p .*

Անվերջ խմբերի սիլովյան տեսության մասին

Խմբերի X դասը կոչվում է սիլովյան կանոնավոր Y դասում, եթե լուրաքանչյուր Y -խմբում մաքսիմալ X -ենթախմբերը համալուծ են: Եթե համալուծությունը գիտարկենք կամայական կամ էլ լուկալ ներքին ավտոմորֆիզմների նկատմամբ, ապա մենք կհանգենք համապատասխանաբար ավտոմորֆ սիլովյան և լուկալ սիլովյան կանոնավոր դասերի գաղափարներին: Աշխատանքում նկարագրվում են S և U օպերատորների նկատմամբ փակ սիլովյան, ավտոմորֆ սիլովյան և լուկալ սիլովյան կանոնավոր ենթադասերը բոլոր խմբերի, լուկալ նորմալ և FC -խմբերի, պարբերական գծալին խմբերի, արեյլյան խմբերի և վերջավոր առաջացած արեյլյան խմբերի դասերում:

ЛИТЕРАТУРА — Դ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ Г. С. Михайлян, Мат. сб., т. 119, № 3 (II) (1982). ² Г. С. Михайлян, ДАН АрмССР, т. 75, № 2 (1982). ³ А. Г. Курош, Теория групп. Наука, М., 1967. ⁴ П. А. Голдберг, Мат. сб. т. 19 (1946). ⁵ В. Н. Neumann, Math. Scand., 6 (1958). ⁶ В. П. Платонов, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 30 (1966).