ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1986 2

УДК 517.944

МАТЕМАТИКА

А. З. Степанян

Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в перфорированной полосе

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 15/VII 1984)

1. В области Ω^ε рассматривается следующая краевая задача:

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon = f(x), \ x\in\Omega^\varepsilon, \\ u_\varepsilon(\hat{x}, 0) = \Phi^1(\hat{x}) \quad u_\varepsilon(\hat{x}, d) = \Phi^2(\hat{x}), \\ u_\varepsilon(x) = 0, \ x\in\partial\Omega^\varepsilon \cap \partial G_\varepsilon, \\ u_\varepsilon - \text{периодична по } x_1, \ldots, x_{n-1} \text{ с периодом 1 (т. е. 1-периодична),} \end{cases} \tag{1}$$

причем $f\in C^\infty(R^n)$, $\Phi^j\in C^\infty(R^{n-1})$ и f, Φ^j являются 1-периодическими по $\hat{x}$. Здесь и всюду в дальнейшем мы следуем обозначениям статьи ([1]), где имеется подробная библиография по изучаемым в нашей статье вопросам.

Наша задача—получить асимптотическое разложение решения u_ε задачи (1) по степеням параметра ε и дать оценку остаточного члена этого разложения.

При исследовании задачи (1) возникает следующая более общая задача:

$$\Delta u = f + \frac{\partial f^m}{\partial x_m} \ \text{в } \Omega^\varepsilon, \tag{2}$$

$$u(\hat{x}, 0) = \Phi^1(\hat{x}), \ u(\hat{x}, d) = \Phi^2(\hat{x}), \tag{3}$$

$$u = 0 \ \text{на } \partial\Omega^\varepsilon \cap \partial G_\varepsilon, \tag{4}$$

$$u - \text{1-периодична по } \hat{x}, \tag{5}$$

причем предполагается, что все функции, входящие в (2)—(5), являются 1-периодическими по $\hat{x}$, $\Phi^j\in\hat{H}_{1/2}(g_j)$, $j=1, 2$, $f\in L_2(\Omega_1^\varepsilon)$.

Функцию $u(x)$ будем называть обобщенным решением задачи (2)—(5), если $u\in\hat{H}_1(\Omega_1^\varepsilon)$, выполняются условия (3), (4) и для любой $v\in\hat{H}_1(\Omega_1^\varepsilon)$ такой, что $v|_{g_1\cup g_2}=0$, $v|_{\partial\Omega^\varepsilon\cap\partial G_\varepsilon}=0$, справедливо интегральное тождество

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)\,dx = -\int_{\Omega_1^\varepsilon} \left(fv - f^m \frac{\partial v}{\partial x_m}\right) dx. \tag{6}$$

Будем рассматривать также следующие вспомогательные задачи:

$$\begin{cases}\Delta w=F(\xi) \text{ в } R^n_+\setminus\overline{G}_1, & (7)\\ w(\hat{\xi}, 0)=\Phi(\hat{\xi}), & (8)\\ w=0 \text{ на } \partial G_1\cap R^n_+, & (9)\\ w\text{—1-периодична по } \hat{\xi}, & (10)\end{cases}$$

где $R^n_+=\{x\in R^n,\ x_n>0\}$. Здесь предполагается, что функции, входящие в (7)—(10), являются 1-периодическими по $\hat{\xi}$, $\Phi\in\hat{H}_{1/2}(S_0)$,

$$\int\limits_{\omega(s,s+1)} F^2d\xi\leqslant c_1\exp(-a_1s),\quad s=0,1,2,\ldots, \tag{11}$$

где c_1, $a_1=\mathrm{const}>0$.

Функцию $w(\xi)$ будем называть обобщенным решением задачи (7)—(10), если $w\in\hat{H}_1(\omega(0,\infty))$, выполняются условия (8), (9) и для любой $v\in\hat{H}_1(\omega(0,\infty))$, $v|_{S_0\cup(\partial G_1\cap\omega(0,\infty))}=0$, справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_{\omega(0,\infty)}(\mathrm{grad}\,w,\ \mathrm{grad}\,v)d\xi=-\int\limits_{\omega(0,\infty)}Fv\,d\xi. \tag{12}$$

И, наконец, для наших целей потребуются также 1-периодические по ξ обобщенные решения (понимаемые в общепринятом смысле) следующей задачи:

$$\begin{cases}\Delta w=F(\xi) \text{ в } R^n\setminus\overline{G}_1,\\ w=0 \text{ на } \partial G_1,\ w\text{—1-периодична по } \xi.\end{cases} \tag{13}$$

Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. *Существует единственное обобщенное (об.) решение w задачи* (13), *и для этого решения справедлива оценка*

$$\|w\|^2_{H_1(Q\setminus G^0)}\leqslant c\|F\|^2_{L_2(Q\setminus G^0)}, \tag{14}$$

где постоянная c не зависит от F.

Теорема 2. *Задача* (7)—(10) *имеет единственное об. решение w, для которого справедлива оценка*

$$\|w\|_{\hat{H}_1(\omega(0,\infty))}\leqslant c(\|F\|_{L_2(\omega(0,\infty))}+\|\Phi\|_{1/2,S_0}), \tag{15}$$

где постоянная c не зависит от F и Φ.

Оказывается, что имеют место также следующие оценки:

$$\int\limits_{\omega(s,s+1)}|\mathrm{grad}\,w|^2d\xi\leqslant c_2\exp(-a_2s),\quad s=0,1,2,\ldots,\quad c_2,\ a_2=\mathrm{const}>0, \tag{16}$$

которые нужны при построении асимптотического разложения.

Теорема 3. *Задача* (2)—(5) *имеет единственное об. решение $u\in\hat{H}_1(\Omega_1^\varepsilon)$, и для этого решения справедлива оценка*

$$\|u\|^2_{\hat{H}_1(\Omega_1^\varepsilon)}\leqslant c\left(\|f\|^2_{L_2(\Omega_1^\varepsilon)}+\sum_{m=1}^n\|f^m\|^2_{L_2(\Omega_1^\varepsilon)}+\|\Phi^1\|^2_{1/2,g_1}+\|\Phi^2\|^2_{1/2,g_2}\right), \tag{17}$$

где $c=\mathrm{const}$ и не зависит от ε.

2. Построение асимптотического разложения. Будем искать решение u_ε задачи (1) в виде формального ряда

$$u_\varepsilon \cong \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \sum_{\langle\alpha\rangle=l} N_\alpha(\xi) D^\alpha v_\varepsilon(x), \quad \xi=\varepsilon^{-1}x. \tag{18}$$

Согласно правилу дифференцирования сложной функции $\Delta u = \varepsilon^{-2}\Delta_\xi + 2\varepsilon^{-1}\Delta_{x\xi} + \varepsilon^0\Delta_x$, где $\Delta_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\Delta_\xi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}$, $\Delta_{x\xi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial \xi_i}$.

Подставляя формальный ряд (18) в (1), получим формальное равенство $f(x) \cong \Delta u_\varepsilon \cong \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{l-2} \sum_{\langle\alpha\rangle=l} H_\alpha(\xi) D^\alpha v_\varepsilon(x)$, где $H_\alpha(\xi) = \Delta_\xi N_\alpha(\xi) + 2\frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha_1}} N_{\alpha_2\ldots\alpha_l}(\xi) + \delta_{\alpha_1\alpha_2} N_{\alpha_3\ldots\alpha_l}(\xi)$ ($N_\alpha(\xi)$ с отрицательной длиной $\langle\alpha\rangle$ индекса α считаются равными нулю).

Будем отыскивать N_α в виде $N_\alpha = N_\alpha^0 + N_\alpha^1 + N_\alpha^2$, где $N_\alpha^0(\xi)$ — 1-периодические по ξ функции, а $N_\alpha^1(\xi)$, $N_\alpha^2(\xi)$ соответствуют пограничным слоям.

Положим $N_0^0 = N_{\alpha_1}^0 = 0$. Функции N_α^0 определим как 1-периодические по ξ решения рекуррентной последовательности следующих задач:

$$\begin{cases} \Delta_\xi N^0_{\alpha_1\alpha_2}(\xi) = \delta_{\alpha_1\alpha_2} \text{ в } R^n \diagdown \overline{G}_1, \\ N^0_{\alpha_1\alpha_2} = 0 \text{ на } \partial G_1, \\ N^0_{\alpha_1\alpha_2} \text{ — 1-периодична по } \xi, \end{cases} \tag{19_1}$$

$$\begin{cases} \Delta_\xi N^0_\alpha(\xi) = -T^0_\alpha(\xi) \text{ в } R^n \diagdown \overline{G}_1, \\ N^0_\alpha = 0 \text{ на } \partial G_1, \\ N^0_\alpha \text{ — 1-периодична по } \xi, \ \langle\alpha\rangle > 2. \end{cases} \tag{19_2}$$

Существование и единственность решений этих задач следуют из теоремы 1.

Функции $N^1_\alpha(\xi)$, $N^2_\alpha(\xi)$ определяются последовательно из рекуррентной последовательности задач при $\langle\alpha\rangle = 1, 2, \ldots$

$$\begin{cases} \Delta_\xi N^1_\alpha(\xi) = -T^1_\alpha(\xi) \text{ в } R^n_+ \diagdown \overline{G}_1, \\ N^1_\alpha = 0 \text{ на } R^n_+ \cap \partial G_1, \\ N^1_\alpha(\hat{\xi}, 0) = -N^0_\alpha(\hat{\xi}, 0) + 1, \\ N^1_\alpha \text{ — 1-периодична по } \hat{\xi}, \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} \Delta_\xi N^2_\alpha(\xi) = -T^2_\alpha(\xi) \text{ в } K = \left\{\xi \in R^n \diagdown \overline{G}_1, \ \xi_n < \frac{d}{\varepsilon}\right\} \\ N^2_\alpha = 0 \text{ на } K \cap \partial G_1, \\ N^2_\alpha\left(\hat{\xi}, \frac{d}{\varepsilon}\right) = -N^0_\alpha(\hat{\xi}, 1) + 1, \\ N^2_\alpha \text{ — 1-периодична по } \hat{\xi}, \end{cases} \tag{21}$$

где $T^p_\alpha(\xi) = 2\frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha_1}} N^p_{\alpha_2\ldots\alpha_l}(\xi) + \delta_{\alpha_1\alpha_2} N^p_{\alpha_3\ldots\alpha_l}(\xi)$, $p=0, 1, 2$.

Существование N^1_α, N^2_α обеспечивается теоремой 2.

Для оценки остаточного члена асимптотического ряда решения u_ε задачи (1) потребуется следующая

Лемма. *Для решений* N_α^p, $p=0, 1, 2$ *задач* (19_1), (19_2), (20), (21) *справедливы оценки*

$$\int\limits_{\Omega_1^\varepsilon} \left[\left(\operatorname{grad}_\xi N_\alpha^p \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right)^2 + \left(N_\alpha^p \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right)^2 \right] dx \leq M_\alpha^p, \quad p=0, 1, 2, \tag{22}$$

где $M_\alpha^p = \mathrm{const} > 0$ *и не зависят от* ε.

Доказательство этой леммы есть в [1].

Определив таким образом N_α^p, $p=0, 1, 2$, после подстановки u_ε в (1) получим формальные равенства

$$f(x) \cong \Delta v_\varepsilon(x),$$

$$\Phi^1(\hat{x}) \cong \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \sum_{\langle\alpha\rangle = l} \left(1 + N_\alpha^1 \left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, 0 \right) \right) D^\alpha v_\varepsilon \Big|_{x_n = 0}, \tag{23}$$

$$\Phi^2(\hat{x}) \cong \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \sum_{\langle\alpha\rangle = l} \left(1 + N_\alpha^2 \left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon}, \frac{d}{\varepsilon} \right) \right) D^\alpha v_\varepsilon \Big|_{x_n = d}, \tag{24}$$

$$u_\varepsilon = 0 \text{ на } \partial\Omega^\varepsilon \cap \partial G_\varepsilon.$$

Будем искать $v_\varepsilon(x)$ в виде ряда $v_\varepsilon(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j V_j(x)$.

Подставляя формально $v_\varepsilon(x)$ в (23), (24) и приравнивая члены одного порядка по ε, получим рекуррентную последовательность задач для V_j:

$$\begin{cases} \Delta V_j(x) = \delta_{0j} f(x) \text{ в } \{x : 0 < x_n < d\}, \\ V_j(\hat{x}, 0) = \varphi_j^1(\hat{x}), \quad V_j(\hat{x}, d) = \varphi_j^2(\hat{x}), \\ V_j - 1\text{-периодична по } \hat{x}, \ j = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

где $\varphi_0^p = \Phi^p$, $\varphi_j^p = -\sum\limits_{l=1}^{j} \sum\limits_{\langle\alpha\rangle = l} D^\alpha V_{j-l}$, $p = 1, 2$, $j = 1, 2, \ldots$.

Функции V_j существуют вследствие теоремы 3. Положим

$$v_\varepsilon^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \varepsilon^j V_j(x),$$

$$u_\varepsilon^{(k)}(x) = \sum_{l=0}^{k+1} \varepsilon^l \sum_{\langle\alpha\rangle = l} N_\alpha \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) D^\alpha v_\varepsilon^{(k)}(x).$$

Имеет место следующая основная

Теорема 4. *Функция* $u_\varepsilon^{(k)}$ *является решением задачи*

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon^{(k)}(x) = f(x) + \varepsilon^{k+1} \theta_0(x, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1} \dfrac{\partial}{\partial x^m} \theta^m(x, \varepsilon) \text{ в } \Omega^\varepsilon, \\ u_\varepsilon^{(k)}(\hat{x}, 0) = \Phi^1(\hat{x}) + \varepsilon^{k+1} \theta_1(\hat{x}, \varepsilon), \\ u_\varepsilon^{(k)}(\hat{x}, d) = \Phi^2(\hat{x}) + \varepsilon^{k+1} \theta_2(\hat{x}, \varepsilon), \\ u_\varepsilon^{(k)} = 0 \textit{ на } \partial\Omega^\varepsilon \cap \partial G_\varepsilon, \\ u_\varepsilon^{(k)} - 1\textit{-периодична по } \hat{x}, \end{cases} \tag{25}$$

где $\|\theta_0(x, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega_1^\varepsilon)} + \sum\limits_{m=1}^{n} \|\theta^m(x, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega_1^\varepsilon)} \leq M_1$,

$$\|\theta_i(\hat{x}, \varepsilon)\|_{L_2(\omega_\varepsilon)} \leqslant M_2, \quad i=1, 1,$$

M_1, M_2—постоянные, не зависящие от ε.

Для $u^{(k)}-u_\varepsilon$ справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon^{(k)}-u_\varepsilon\|_{H_1(\Omega_1^\varepsilon)} \leqslant M_3\varepsilon^{k-1}, \tag{26}$$

где постоянная M_3 не зависит от ε, u_ε—решение задачи (1).

З а м е ч а н и е. Все результаты остаются справедливыми и для системы теории упругости.

РВЦ Министерства сельского хозяйства Армянской ССР

Ա. Զ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

Պերֆորացված շերտում Պուասոնի հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի լուծման ասիմպտոտիկ վերլուծությունը

Աշխատանքում պերֆորացված Ω^ε շերտում ուսումնասիրվում է Դիրիխլեի (1) խնդիրը։ Այս խնդրի u_ε լուծման համար կառուցվում է հետևյալ ասիմպտոտիկ վերլուծությունը՝

$$u_\varepsilon = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \sum_{\langle\alpha\rangle=l} N_\alpha(\xi) D^\alpha v_\varepsilon(x), \quad \xi=\varepsilon^{-1}x:$$

N_α ֆունկցիաները ներկայացվում են $N_\alpha=N_\alpha^0+N_\alpha^1+N_\alpha^2$ տեսքով, որտեղ N_α^0-ներն ըստ ξ-ի 1-պարբերական են, իսկ N_α^1, N_α^2 ֆունկցիաները համապատասխանում են այսպես կոչված եզրային շերտերին։ Իր հերթին, $v_\varepsilon(x)$-ը ներկայացվում է $v_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j V_j(x)$ շարքի տեսքով, որտեղ V_j-երը հանդիսանում են $\{x:0<x_n<d\}$ շերտում էլիպտիկ խնդիրների որոշակի ռեկուրենտ հաջորդականության լուծումները։

Հիմնական արդյունքը ձևակերպված է թեորեմ 4-ում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян Г. П. Панасенко,* Мат. сб., т. 120(162), № 1 (1983).