ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1986 2

УДК 515.1

МАТЕМАТИКА

Э. А. Мирзаханян

О непрерывно дифференцируемых отображениях, принадлежащих одному классу отображений подмножеств гильбертова пространства

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 2/VII 1984)

В статье приводятся некоторые результаты исследования непрерывно дифференцируемых отображений $f: G \to H$ открытых подмножеств $G \subset H$ вещественного сепарабельного гильбертова пространства H, принадлежащих одному специальному классу отображений K_0.

Определение и ряд основных свойств класса K_0, содержится в ([1]). Ряд других свойств содержится в ([2,3]).

Некоторые результаты исследования линейных ограниченных операторов $f: H \to H$, принадлежащих классу K_0 приведены в ([4,5]).

Через $K_0(H)$ будем обозначать ([5]) $*$-алгебру, состоящую из всех линейных ограниченных операторов $f: H \to H$, принадлежащих классу K_0, а через λ—линейный функционал $\lambda: K_0(H) \to R$, ставящий каждому оператору $f \in K_0(H)$ его терминальное число $\lambda(f)$.

Теорема 1. *Пусть G —открытое подмножество пространства H и $f: G \to H$—непрерывно дифференцируемое на G отображение. Для того чтобы f принадлежало классу K_0, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $x \in G$ производная Фреше $f'(x)$ отображения f принадлежала классу K_0; при этом значение $\lambda_f(x_0)$ терминальной производной λ_f отображения f в точке x_0 совпадает с терминальным числом $\lambda(f'(x_0))$ (см. ([4])) оператора $f'(x_0)$, т. е. коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "\lambda_f"'] & & K_0(H) \arrow[dl, "\lambda"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Из теоремы 1 и из теоремы, доказанной в ([4]), можно получить следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть G—открытое подмножество пространства H и $f: G \to H$—непрерывно дифференцируемое отображение. Тогда для того чтобы f принадлежало классу K_0, необходимо и достаточно, чтобы f локально удовлетворяло условию: для любой точки $x_0 \in G$ существует такая ее окрестность $U \subset G$, в которой f представимо в виде*

$$f(x) = \lambda(x_0)x + B(x) + \omega(x), \tag{1}$$

где $\lambda(x_0)$—вещественное число, зависящее от точки x_0, B—непре-

рывно дифференцируемый вполне непрерывный оператор, зависящий от x_0, а ω—оператор, обладающий следующими свойствами: 1) $\omega(x_0)=0$; 2) ω *имеет равную нулю производную Фреше в точке* x_0; 3) $\lim\limits_{(x-x_0)\to 0}\dfrac{\|\omega(x)\|}{\|x-x_0\|}=0$, *т. е.* $\omega(x)=0(\|x-x_0\|)$.

Приведем ряд утверждений, вытекающих из теоремы 1 и из результатов, содержащихся в работах ([4]) и ([5]).

Предложение 1. Пусть G—открытое подмножество пространства H, а $f, g: G\to H$—непрерывно дифференцируемые отображения, обладающие тем свойством, что для каждой точки $x_0 \in G$ оператор $f'(x_0)=g'(x_0)$ вполне непрерывен, в частности $f'(x_0)=g'(x_0)$. Тогда если одно из отображений f и g принадлежит K_0, то и другое принадлежит K_0; при этом терминальные производные $\lambda_f(x)$ и $\lambda_g(x)$ этих отображений на всем G совпадают между собой.

Замечание 1. Из предложения 1 следует, что аффинное непрерывное отображение $f: H\to H$ принадлежит K_0 тогда и только тогда, когда ассоциированное с ним линейное непрерывное отображение $g: H\to H$ принадлежит K_0, при этом терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f постоянна на всем H и ее значение совпадает с терминальным числом $\lambda(g)$ отображения g.

Предложение 2. Пусть G—открытое подмножество пространства H и (f_n)—последовательность непрерывно дифференцируемых отображений $f_n: G\to H$, принадлежащих классу K_0. Предположим, что непрерывное отображение $f: G\to H$ является пределом последовательности f_n при равномерной сходимости на ограниченных подмножествах множества G. Тогда отображение f принадлежит K_0 и для любой точки $x \in G$ имеет место соотношение $\lambda_f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_{f_n}(x)$.

Положим $H^*=R^n\times H$. Тогда H^* является вещественным сепарабельным гильбертовым пространством и H—подпространство конечного дефекта n в нем.

Предложение 3. Пусть $f: H^*\to H\subset H^*$ непрерывно дифференцируемое в H^* отображение. Тогда f принадлежит K_0 (в H^*) тогда и только тогда, когда в каждой точке $x_0 \in H^*$ частная производная $D_2 f(x_0)$ отображения f по второй переменной принадлежит K_0 (в H). При выполнении этого условия имеет место соотношение $\lambda_f(x)=\lambda(D_2 f(x))$ для каждой точки $x \in H^*$.

Следствие 1. Пусть $H^*=R\times H$ и $f: H^*\to H$—отображение, задаваемое по формуле $f(\mu, x)=\mu\cdot x$, тогда $f \in K_0$, причем $\lambda_f(\mu, x)=\mu$ для каждой точки $(\mu, x)\in H^*$.

Теорема 3. *Пусть G—открытое подмножество пространства H и $f_1: G\to R^n\subset H$, $f_2: G\to H$—непрерывные отображения. Тогда для того чтобы диагональное произведение $f=(f_1, f_2): G\to H^*=R^n\times H$ принадлежало классу K_0, необходимо и достаточно, чтобы его компоненты f_1 и f_2 принадлежали K_0. При выполнении этого условия имеет место соотношение $\lambda_f(x)=\lambda_{f_2}(x)$ для каждой точки $x \in G$.*

Следствие 2. Пусть G—открытое подмножество пространства H, $\lambda(x)$—непрерывно дифференцируемая вещественная функция, заданная на G, и $g: G\to H$ — отображение, принадлежащее классу K_0. Тогда отображение $f: G\to H$, задаваемое по формуле $f(x)=\lambda(x)g(x)$, принадлежит K_0, причем имеет место соотношение $\lambda_f(x)=\lambda(x)\lambda_g(x)$ для каждой точки $x\in G$.

Следствие 3. Пусть G—открытое подмножество пространства H, $\lambda(x)$—заданная на G непрерывно дифференцируемая вещественная функция и $A: G\to H$ непрерывно дифференцируемый вполне непрерывный оператор. Тогда отображение $f: G\to H$, задаваемое по формуле $f(x)=\lambda(x)x+A(x)$ для каждой точки $x\in G$, принадлежит классу K_0, причем $\lambda_f(x)=\lambda(x)$.

Предложение 4. Пусть G и G'—открытые подмножества пространства H и $f: G\to G'$, $g: G'\to H$—непрерывно дифференцируемые отображения. Тогда

а) если отображения $g\circ f$ и f принадлежат K_0, причем f—сюъективно и для любой точки $x\in G$, $\lambda_f(x)\neq 0$, то отображение $g\in K_0$ и для любой точки $x\in G$ имеет место соотношение $\lambda_g(f(x))=\dfrac{\lambda_{g\circ f}(x)}{\lambda_f(x)}$;

б) если отображения $g\circ f$ и g принадлежат K_0 и для любой точки $y\in G'$ $\lambda_g(y)\neq 0$, то отображение $f\in K_0$ и для любой точки $x\in G$ имеет место: $\lambda_f(x)=\dfrac{\lambda_{g\circ f}(x)}{\lambda_g(f(x))}$.

Предложение 5. Пусть G—открытое подмножество пространства H и $f: G\to H$—диффеоморфизм, принадлежащий K_0. Тогда а) множество $f(G)$ открыто в H; б) отображение $f^{-1}: f(G)\to H$ принадлежит K_0, причем имеет место соотношение $\lambda_{f^{-1}}(f(x))=\dfrac{1}{\lambda_f(x)}$ для любой точки $x\in G$.

Замечание 2. В предложении 5 предположение о принадлежности отображения f классу K_0 существенно.

В самом деле, рассмотрим произвольную ортонормированную базу $\sigma=(e_n)$ пространства H и линейный ограниченный оператор $T: H\to H$, задаваемый по формуле $T(e_n)=e_{n+1}$ для каждого $n=1, 2, \ldots$ Нетрудно проверить, что оператор T не принадлежит K_0. T—диффеоморфизм и образ $T(H)$ не открыт в H.

Следствие 4. Пусть G—открытое подмножество пространства H и $f: G\to H$—принадлежащий классу K_0 непрерывно дифференцируемый гомоморфизм G в H. Тогда, если для каждой точки $x_0\in G$ $\lambda_f(x_0)\neq 0$ и оператор $f'(x_0)$ инъективен, то отображение $f^{-1}: f(G)\to H$ непрерывно дифференцируемо и принадлежит классу K_0.

Ереванский государственный университет

Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ

Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների արտապատկերումների մի դասին պատկանող անընդհատ դիֆերենցելի արտապատկերումների մասին

Հոդվածում բերված են իրական սեպարաբել Հիլբերտյան H տարածության ենթաբազմությունների արտապատկերումների K_0 դասին պատկանող

անընդհատ դիֆերենցելի արտապատկերումների մի շարք հատկություններ: Մասնավորապես տեղի ունի հետևյալ պնդումը.

Թեորեմ — Եթե G-ն H տարածության բաց բազմություն է և $f: G \to H$ անընդհատ դիֆերենցելի արտապատկերում, ապա որպեսզի f արտապատկերումը պատկանի K_0 դասին, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $x_0 \in G$ կետի համար f արտապատկերման Ֆրեշեի $f'(x_0)$ ածանցյալը պատկանի K_0 դասին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. Г. Болтянский*, Изв. АН АрмССР. Математика. т. 9, № 2 (1974). [2] *В. Г. Болтянский, Э. А. Мирзаханян*, Изв. АН АрмССР. Математика. т. 9, № 5 (1974). [3] *Э. А. Мирзаханян*. Изв. АН АрмССР. Математика. т. 15, № 5 (1980). [4] *Э. А. Мирзаханян*, Межвузовский сб. «Математика» МВ АрмССР, № 3, 1984. [5] *Э. А. Мирзаханян*, Уч. зап. ЕГУ, № 2, 1984.