ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXII 1986 1

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. Мхитарян, С. З. Петросян

Об одной смешанной задаче для упругого полупространства

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 15/II 1985)

Контактные задачи о вдавливании штампов различных геометрических форм в упругое полупространство без учета сил трения или сцепления и родственные задачи для тонких пластин, допускающие замкнутые решения, хорошо известны ([1–7]).

В настоящей работе рассматривается одна смешанная краевая задача для упругого полупространства, когда на части его граничной плоскости, имеющей форму полуплоскости, заданы горизонтальные компоненты смещений при отсутствии нормального напряжения, а на остальной ее части заданы нулевые напряжения. Эта задача непосредственно связана с вопросом контактного взаимодействия упругой тонкой полубесконечной пластины, лишенной изгибной жесткости, с упругим полупространством. При этом горизонтальные компоненты смещений заранее заданы, т. е. задан режим допустимых смещений, и требуется определить законы распределения сдвигающих пластину соответствующих горизонтальных сил, обеспечивающих этот режим. Обсуждается частный случай.

1. Упомянутая смешанная задача математически формулируется в виде краевой задачи для трех уравнений Ламе в полупространстве $z\geqslant 0$ с упругими константами (ν, E), отнесенном к правой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, когда на его границе заданы следующие краевые условия (u, v—горизонтальные компоненты смещений):

$$u(x,y,z)\Big|_{z=0}=f(x,y),\quad v(x,y,z)\Big|_{z=0}=g(x,y),\quad \sigma_z\Big|_{z=0}=0\ (x,y)\in\omega;$$

$$\tau_{xz}\Big|_{z=0}=\tau_{yz}\Big|_{z=0}=\sigma_z\Big|_{z=0}=0\quad (x,y)\in\Pi\setminus\omega;\tag{1.1}$$

$$\Pi=\{z=0,\ |x|<\infty,\ |y|<\infty\},\quad \omega=\{z=0,\ x\geqslant 0,\ |y|<\infty\},$$

где $f(x,y)$ и $g(x,y)$ наперед заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции в области ω, исчезающие вместе с напряжениями на бесконечности. Далее введем обозначения $\tau_{xz}\Big|_{z=0}=-p(x,y)$, $\tau_{yz}\Big|_{z=0}=-q(x,y)$ $((x,y)\in\omega)$, где $p(x,y)$ и $q(x,y)$—компоненты неизвестных тангенциальных напряжений (контактных) в области ω вдоль осей Ox и Oy соответственно. Воспользовавшись известными выражениями функций влияния для упругого полупространства от единичных сосредоточенных на его границе горизонтальных сил [8], краевую задачу (1.1) сформулируем в виде следующей эквивалентной системы интегральных уравнений:

$$\iint_{\omega} K_{11}(x-\xi;\, y-\eta)p(\xi,\eta)d\xi d\eta+\iint_{\omega} K_{12}(x-\xi;\, y-\eta)q(\xi,\eta)d\xi d\eta=f(x,y)$$

$$\iint_{\omega} K_{21}(x-\xi;\, y-\eta)P(\xi,\eta)d\xi d\eta+\iint_{\omega} K_{22}(x-\xi;\, y-\eta)q(\xi,\eta)d\xi d\eta=g(x,y); \tag{1.2}$$

$$K_{11}(x,y)=\vartheta_0 R^{-1}(1+\vartheta_1 x^2R^{-2}),\quad K_{12}(x,y)=K_{21}(x,y)=\vartheta_2 xyR^{-3},$$

$$K_{22}(x,y)=\vartheta_0 R^{-1}(1+\vartheta_1 y^2R^{-2}),\quad R=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\vartheta_0=\vartheta_2\vartheta_1^{-1},\quad \vartheta_2=\nu(1+\nu)(\pi E)^{-1},\quad \vartheta_1=\nu(1-\nu)^{-1}.$$

Теперь к обеим частям системы (1.2) применим преобразование Фурье по переменной y. В результате придем к системе уравнений

$$\int_0^\infty (K_0(|t-\zeta|)+\vartheta_1|t-\zeta|K_1(|t-\zeta|))p_*(\zeta)d\zeta+$$

$$+i\vartheta_1\operatorname{sign}\lambda\int_0^\infty (t-\zeta)K_0(|t-\zeta|)q_*(\zeta)d\zeta=|\lambda|f_*(t)/2\vartheta_0\quad (0<t<\infty) \tag{1.3}$$

$$i\vartheta_1\operatorname{sign}\lambda\int_0^\infty (t-\zeta)K_0(|t-\zeta|)p_*(\zeta)d\zeta+$$

$$+\int_0^\infty ((1+\vartheta_1)K_0(|t-\zeta|)-\vartheta_1|t-\zeta|K_1(|t-\zeta|))q_*(\zeta)d\zeta=|\lambda|g_*(t)/2\vartheta_0.$$

Здесь $K_0(x)$ и $K_1(x)$—известные функции Макдональда, λ—параметр Фурье, а

$$|\lambda|x=t,\quad |\lambda|\xi=\zeta,\quad f_\lambda(x)=f_*(t),\quad g_\lambda(x)=g_*(t),$$

$$p_\lambda(\xi)=p_*(\zeta),\quad q_\lambda(\xi)=q_*(\zeta). \tag{1.4}$$

2. Решение системы (1.3) представим в форме бесконечных рядов

$$p_*(\zeta)=\frac{e^{-\zeta}}{\sqrt{\zeta}}\sum_{n=0}^{\infty}X_nL_n^{-\frac{1}{2}}(2\zeta),\quad q_*(\zeta)=\frac{e^{-\zeta}}{\sqrt{\zeta}}\sum_{n=0}^{\infty}Y_nL_n^{-\frac{1}{2}}(2\zeta)\quad (0<\zeta<\infty), \tag{2.1}$$

где $\{X_n, Y_n\}_{n=0}^{\infty}$—неизвестные коэффициенты, а $L_n^{-\frac{1}{2}}(\zeta)$—полиномы Чебышева — Лагерра. Далее, (2.1) подставим в (1.3) и воспользуемся известным спектральным соотношением [9,10], а также условием ортогональности полиномов Чебышева — Лагерра. В результате придем к следующим двум рекуррентным алгебраическим системам ($m=2$, $3,\ldots$):

$$(-19+4/\vartheta_1)\alpha_0+\alpha_1+15\,\mathrm{sign}\lambda\,\beta_0+\mathrm{sign}\lambda\,\beta_1=|\lambda|f_0^{(1)}/\vartheta_2$$
$$-15\,\mathrm{sign}\lambda\,\alpha_0-\mathrm{sign}\lambda\,\alpha_1+(23+4/\vartheta_1)\beta_0-\beta_1=|\lambda|g_0^{(2)}/\vartheta_2$$
$$-2\alpha_0+(2+4/\vartheta_1)\alpha_1+\alpha_2+2\,\mathrm{sign}\lambda\,\beta_0+\mathrm{sign}\lambda\,\beta_2=-|\lambda|f_1^{(1)}/\vartheta_2 \qquad (2.2)$$
$$-2\,\mathrm{sign}\lambda\,\alpha_0-\mathrm{sign}\lambda\,\alpha_2+2\beta_0+(2+4/\vartheta_1)\beta_1-\beta_2=-|\lambda|g_1^{(2)}/\vartheta_2$$
$$\alpha_{m-1}+(2+4/\vartheta_1)\alpha_m+\alpha_{m+1}-\mathrm{sign}\lambda\,\beta_{m-1}+\mathrm{sign}\lambda\,\beta_{m+1}=(-1)^m|\lambda|f_m^{(1)}/\vartheta_2$$
$$\mathrm{sign}\lambda\,\alpha_{m-1}-\mathrm{sign}\lambda\,\alpha_{m+1}-\beta_{m-1}+(2+4/\vartheta_1)\beta_m-\beta_{m+1}=(-1)^m|\lambda|g_m^{(2)}/\vartheta_2;$$

$$(-19+4/\vartheta_1)\xi_0+\xi_1-15\,\mathrm{sign}\lambda\,\zeta_0-\mathrm{sign}\lambda\,\zeta_1=|\lambda|f_0^{(2)}/\vartheta_2$$
$$15\,\mathrm{sign}\lambda\,\xi_0+\mathrm{sign}\lambda\,\xi_1+(23+4/\vartheta_1)\zeta_0-\zeta_1=|\lambda|g_0^{(1)}/\vartheta_2$$
$$-2\xi_0+(2+4/\vartheta_1)\xi_1+\xi_2-2\,\mathrm{sign}\lambda\,\zeta_0-\mathrm{sign}\lambda\,\zeta_2=-|\lambda|f_1^{(2)}/\vartheta_2 \qquad (2.3)$$
$$2\,\mathrm{sign}\lambda\,\xi_0+\mathrm{sign}\lambda\,\xi_2+2\zeta_0+(2+4/\vartheta_1)\zeta_1-\zeta_2=-|\lambda|g_1^{(1)}/\vartheta_2$$
$$\xi_{m-1}+(2+4/\vartheta_1)\xi_m+\xi_{m+1}+\mathrm{sign}\lambda\,\zeta_{m-1}-\mathrm{sign}\lambda\,\zeta_{m+1}=(-1)^m|\lambda|f_m^{(2)}/\vartheta_2$$
$$-\mathrm{sign}\lambda\,\xi_{m-1}+\mathrm{sign}\lambda\,\xi_{m+1}-\zeta_{m-1}+(2+4/\vartheta_1)\zeta_m-\zeta_{m+1}=(-1)^m|\lambda|g_m^{(1)}/\vartheta_2.$$

Здесь

$$\alpha_n=(-1)^n(n+1)(\lambda_n-\lambda_{n+1})\mathrm{Re}X_n,\quad \beta_n=(-1)^n(n+1)(\lambda_n-\lambda_{n+1})\mathrm{Im}\,Y_n,$$
$$\xi_n=(-1)^n(n+1)(\lambda_n-\lambda_{n+1})\mathrm{Im}X_n,\quad \zeta_n=(-1)^n(n+1)(\lambda_n-\lambda_{n+1})\mathrm{Re}\,Y_n, \qquad (2.4)$$
$$f_n=(\pi\lambda_n)^{-1}\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}L_n^{-\frac{1}{2}}(2t)\,f_*(t)\,dt,\quad g_n=(\pi\lambda_n)^{-1}\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}L_n^{-\frac{1}{2}}(2t)g_*(t)dt,$$
$$\lambda_n=\Gamma(n+1/2)/\sqrt{2}n!,\quad f_n=f_n^{(1)}+if_n^{(2)},\quad g_n=g_n^{(1)}+ig_n^{(2)}(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Для определения неизвестных коэффициентов рекуррентных соотношений (2.2) из первых двух уравнений системы (2.2) β_0, β_1 выражаем через α_0, α_1, а затем подставляем в третье и четвертое уравнения. Исключив из последних β_2, получаем выражение α_0, а также β_0. Теперь β_1, β_2 выражаем через α_1, α_2, подставляем в пятое и шестое уравнения. Исключив из них β_3, получаем выражение α_1, а также β_1. Описанную процедуру можно применить для определения остальных коэффициентов. Таким образом последовательно получаем коэффициенты

$$\alpha_n=A|\lambda|+B\lambda,\quad \beta_n=C|\lambda|+D\lambda\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где постоянные A, B, C, D известным образом зависят от ν, E, $f_k^{(1)}$ и $g_k^{(2)}$ ($k=0, 1, 2, \ldots, n+1$). Система (2.3) решается аналогичным образом.

3. Рассмотрим частный случай, когда компоненты смещений заданы в виде

$$f(x,\ y)=l\cos\lambda y,\quad g(x,\ y)=0\quad (l,\ \lambda>0).$$

В этом случае из (2.3) вытекает, что $\xi_n=\zeta_n=0$ ($n=0, 1, 2, \ldots$), а решение системы (2.2) имеет вид

$$\alpha_n=\sqrt{2}l|\lambda|a_n/\pi\vartheta_2,\quad \beta_n=\sqrt{2}l\lambda b_n/\pi\vartheta_2\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (3.1)$$

Здесь постоянные a_n, b_n известным образом зависят от ν, E и начиная с третьего номера определяются рекуррентными соотношениями.

Теперь (2.1) с учетом (1.4), (2,4), (3.1) примет вид

$$p_\lambda(\xi)=l\left[\frac{e^{-|\lambda|\xi}}{\sqrt{|\lambda|\xi}}|\lambda|\sum_{n=0}^{\infty}e_nL_n^{-\frac{1}{2}}(2|\lambda|\xi)\right],\quad q_\lambda(\xi)=il\left[\frac{e^{-|\lambda|\xi}}{\sqrt{|\lambda|\xi}}\lambda\sum_{n=0}^{\infty}k_nL_n^{-\frac{1}{2}}(2|\lambda|\xi)\right]$$

$$e_n=(-1)^n2\sqrt{2}a_n/\pi\vartheta_2\lambda_n,\quad k_n=(-1)^n2\sqrt{2}b_n/\pi\vartheta_2\lambda_n\quad (0<\xi<\infty).$$

Далее, воспользовавшись интегральным соотношением из [9], можно определить компоненты смещений в области $\Pi\setminus\omega$.

Образы Фурье смещений граничных точек упругого полупространства в области $\Pi\setminus\omega$ в соответствии с (1.3) даются формулами

$$u_\lambda(x)=2\vartheta_0\left[\int_0^{\infty}(K_0(|\lambda|\,|x-\xi|)+\vartheta_1|\lambda|\,|x-\xi|K_1(|\lambda|\,|x-\xi|))p_\lambda(\xi)d\xi+\right.$$

$$\left.+i\vartheta_1\int_0^{\infty}\lambda(x-\xi)K_0(|\lambda|\,|x-\xi|)q_\lambda(\xi)d\xi\right]\quad (x<0);$$

$$v_\lambda(x)=2\vartheta_0\left[i\vartheta_1\int_0^{\infty}\lambda(x-\xi)K_0(|\lambda|\,|x-\xi|)p_\lambda(\xi)d\xi+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\infty}((1+\vartheta_1)K_0(|\lambda|\,|x-\xi|)-\vartheta_1|\lambda|\,|x-\xi|K_1(|\lambda|\,|x-\xi|))q_\lambda(\xi)d\xi\right].$$

В этих формулах, опять перейдя к величинам (1.4) и используя разложения (2.1), при помощи интегральных соотношений из [10], родственных соответствующим спектральным соотношениям и дающих значения интегралов вне интервала интегрирования, можно получить явные выражения образов Фурье указанных смещений.

Институт механики Академии наук Армянской ССР
Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Ս. Զ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Առաձգական կիսատարածության համար մի խառը խնդրի մասին

Դիտարկվում է առաձգական կիսատարածության համար մի խառը եզրային խնդիր, երբ նրա եզրային հարթության մի մասի վրա, որն ունի կիսահարթության տեսք, տրված են տեղափոխությունների հորիզոնական բաղադրիչները նորմալ լարման բացակայության դեպքում, իսկ մնացած մասի վրա տրված են զրոյական լարումներ։ Խնդրի լուծումը բերվում է արգումենտների տարբերությունից կախված կորիզներով ինտեգրալ հավասարումների համա-

կարգի լուծմանը։ Վերջինս կառուցվում է Չեբիշև—Լագերի օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդով և անհայտ գործակիցները որոշվում են ռեկուրենտ առնչություններից։ Արդյունքում ստացված է դրված խնդրի փակ լուծումը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Галин,* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. Наука. М., 1980. [2] *И. Я. Штаерман,* Контактная задача теории упругости. Гостехиздат. М.—Л., 1949. [3] Развитие теории контактных задач в СССР. Наука, М., 1976. [4] *Уэстмен,* Прикладная механика, Тр. Амер. о-ва инж.-мех., сер. Е, т. 32, № 2 (1965). [5] *В. М. Александров, А. С. Соловьев,* Изв. АН СССР. МТТ. № 2. 1966. [6] *B. L. Abramjan,* The mechanics of the contact between deformable bodies. Proc. of the symposium IUTAM, Delft University press, 1975. [7] *G. M. L. Gladwell,* Intern. J. of Eng. Sci., v. 7 p. 295—307 (1969). [8] *А. И. Лурье.* Пространственные задачи теории упругости, М., Гостехиздат, 1955. [9] *Г. Я. Попов,* Журн. техн. физ., т. 35, вып. 3 (1965). [10] *С. М. Мхитарян.* Изв. АН СССР. МТТ, № 1, 1983.