ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1986 1

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Н. В. Григорян

Оценки для производной полинома, имеющего функциональную мажоранту на лучах и угловых областях комплексной области

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 16/V 1985)

1. (а) В работе ([1]) А. А. Марковым было установлено, что производная полинома степени $n\geq 1$, подчиненного условию

$$|Q_n(x)|\leq M, \quad -1\leq x\leq 1 \tag{1}$$

имеет оценку $|Q_n'(x)|\leq n^2 M$, $-1\leq x\leq 1$.

С. Н. Бернштейном ([2]) был обобщен этот результат: первые производные полиномов степени $n\geq 1$, подчиненных условию (1) внутри открытого промежутка $-1<x<1$, при $n\to+\infty$ растут как $o(n)$.

В работе ([3]) М. М. Джрбашян дал новый метод для оценки производных полиномов, имеющих функциональную мажоранту на бесконечных кривых. Эти оценки представляют собой существенное обобщение вышеуказанных оценок и дают возможность установить обратные теоремы о взвешенно-наилучших приближениях. Было установлено, что в отличие от классического в случае, когда последовательность полиномов $\{Q_n(x)\}_1^\infty$ удовлетворяет условию $|Q_n(x)|\leq e^{p(|x|)}$, $-\infty<x<+\infty$, где $Q_n(x)$ полином степени $n\geq 1$, а $p(x)$ произвольная непрерывная и монотонно возрастающая на $[0,+\infty)$ функция, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-p(x)}=0$ $(n=1,2,\ldots)$, на любом конечном отрезке $|x|\leq R<+\infty$ их производные $Q_n'(x)$ растут существенно медленнее, а именно,

1) при $\displaystyle\int_1^\infty \frac{p(x)}{x^2}dx=+\infty$ как $\displaystyle\int_1^n \frac{dy}{q(y)}$ при $n\to+\infty$;

2) при $\displaystyle\int_1^\infty \frac{p(x)}{x^2}dx<+\infty$ они вообще ограничены;

здесь $q(y)$—функция, обратная к $p(x)$.

В той же работе ([3]) были получены оценки для производных полиномов $\{Q_n(z)\}$, имеющих функциональную мажоранту на лучах $\arg z=\pm\dfrac{\pi}{2\alpha}\left(\alpha\geq\dfrac{1}{2}\right)$.

(б) Мне была предложена задача: найти равномерные оценки для производных последовательности полиномов $\{Q_n(z)\}$, удовлетворяющих условию

$$|Q_n(z)|\leqslant e^{p(|z|)},\quad l_\alpha^{\pm}=\left\{\arg z=\pm\frac{\pi}{2\alpha},\quad \alpha\geqslant\frac{1}{2}\right\}\ (n\geqslant N) \tag{2}$$

во всех точках лучей $l_\alpha^{\pm}$, где N—некоторое натуральное число.

2. В данной работе приводится решение этой задачи. Нами получены оценки для производных полиномов степени $n\geqslant N$, подчиненных условию (2) на двух лучах, исходящих из начала координат, где натуральное число N зависит только от лучей и веса $p(x)$.

Пусть функция $p(x)\in C[0,+\infty)$ монотонно возрастает, $p(0)=0$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-p(x)}=0\quad (n=0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

а $q(y)$—обратная к ней функция.

При этом нам удалось решить поставленную задачу лишь в том случае, когда весовая функция $p(x)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{p'(x)}{p(x)}x\leqslant p_0<+\infty. \tag{4}$$

Установлены следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $p(x)\geqslant 0$ *непрерывная, монотонно возрастающая на* $[0,+\infty)$ *функция, удовлетворяющая условиям* (3) *и* (4), *причем*

$$\int^{\infty}\frac{p(x)}{x^{1+\alpha}}\,dx=+\infty\ \left(\alpha\geqslant\frac{1}{2}\right).$$

Пусть, далее, $\{Q_n(z)\}$—*последовательность полиномов* ($Q_n(z)$—*полином степени* $n\geqslant 1$), *обладающих функциональной мажорантой*

$$|Q_n(z)|\leqslant e^{p(|z|)},\quad z\in\Delta(\alpha),$$

в области угла

$$\Delta(\alpha)=\left\{z:\frac{\pi}{2\alpha}\leqslant|\mathrm{Arg}z|\leqslant\pi\right\}\quad\left(\frac{1}{2}\leqslant\alpha<+\infty\right)$$

(*которая вырождается в полуось* $(-\infty, 0]$ *при* $\alpha=\frac{1}{2}$).

Тогда:

а) *при* $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$ *для любых* $k\geqslant 1$ *и* $n\geqslant N_k$ *имеем*

$$|Q_n^{(k)}(z)|\leqslant C_k[p(|z|)+|z|^{\alpha}+1]^k\left(\int_1^n\frac{dy}{[q(y)]^{\alpha}}\right)^{\frac{k}{\alpha}}e^{p(|z|)},\ z\in\Delta(\alpha);$$

б) *при* $1\leqslant\alpha<+\infty$ *для любых* $k\geqslant 1$ *и* $n\geqslant N_k$ *имеем*

$$|Q_n^{(k)}(z)|\leqslant D_k[p(|z|)+|z|+1]^k\left\{|z|+\left(\int\limits_1^n\frac{dy}{[q(y)]^{\alpha}}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}\right\}^{(\alpha-1)k}\times$$

$$\times\left(\int\limits_1^n\frac{dy}{[q(y)]^{\alpha}}\right)^k e^{p(|z|)},\qquad z\in\Delta(\alpha),$$

где $N_k\geqslant 1,\ C_k>0,\ D_k>0$ *некоторые постоянные, не зависящие от* n *и* r.

Теорема 2. *Пусть* $p(x)\geqslant 0$ *непрерывная, монотонно возрастающая на* $[0,+\infty)$ *функция, удовлетворяющая условиям* (3), (4), *и пусть* $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$. *Если*

$$\int^{\infty}\frac{p(x)}{x^{1+\omega}}dx=+\infty,\qquad \omega=\frac{\alpha}{2\alpha-1}\geqslant 1,$$

то для любого $k\geqslant 1$ *существует натуральное число* N_k *такое, что для* k*-той производной любого полинома степени* $n\geqslant N_k$, *удовлетворяющего условию*

$$|Q_n(z)|\leqslant e^{p(|z|)},\quad \arg z=\pm\frac{\pi}{2\alpha},$$

имеют место оценки:

а) *при* $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$

$$|Q_n^{(k)}(re^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}})|\leqslant A_k r^{\frac{1-\alpha}{2\alpha-1}k}[p(r)+r+1]^k\left(\int\limits_1^n\frac{dy}{[q(y)]^{\alpha}}\right)^{\frac{k}{\alpha}}e^{p(r)},\quad 0\leqslant r<+\infty;$$

б) *при* $\alpha=\frac{1}{2}$

$$|Q_n^{(k)}(-r)|\leqslant B_k[p(r)+r^{\frac{1}{2}}+1]^k\left(\int\limits_1^n\frac{dy}{[q(y)]^{1/2}}\right)^{2k}e^{p(r)},\quad 0\leqslant r<+\infty,$$

где A_k *и* B_k*—положительные постоянные, не зависящие от* n *и* r, *а* $q(y)$*—функция, обратная к* $p(x)$.

Доказательства этих теорем получаются некоторой модификацией метода, который первоначально был развит в работе ([3]).

Автор приносит глубокую благодарность академику АН АрмССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и за руководство и А. А. Вагаршакяну за полезные обсуждения.

Ереванский государственый
университет

Ն. Վ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Կոմպլեքս հարթության ճառագայթների և անկյունային տիրույթների վրա ֆունկցիոնալ մաժորանտ ունեցող բազմանդամ ածանցյալի գնահատականը

Աշխատանքում ստացված են $e^{p(|z|)}$ ֆունկցիոնալ մաժորանտ ունեցող $Q_n(z)$ բազմանդամի ածանցյալի համար հավասարաչափ գնահատականներ համապատասխանաբար

$$\Delta_\alpha=\left\{z: \frac{\pi}{2\alpha} \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \pi\right\} \quad \left(\frac{1}{2} \leqslant \alpha < +\infty\right)$$

անկյունային տիրույթում և

$$l_\alpha^{\pm}=\left\{z: \arg z = \pm \frac{\pi}{2\alpha}\right\} \quad \left(\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1\right)$$

ճառագայթների համակարգի վրա, եթե կշռային $p(x)$ ֆունկցիան բավարարում է (3)—(4) պայմաններին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Марков,* в кн.: Избранные труды по теории непрерывных дробей и теория функций, наименее уклоняющихся от нуля, ОГИЗ, М.—Л., 1948. [2] *С. Н. Бернштейн,* Экстремальные свойства полиномов, Гл. ред. общетехнической лит., М.—Л., 1937. [3] *М. М. Джрбашян,* Мат. сб., т. 36(78), вып. 3 (1955).