ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1986 1

УДК 519.6

МАТЕМАТИКА

А. Д. Джавадян

Выбор сетки в вариационно-разностном методе (ВРМ) решения эллиптических уравнений в зависимости от свойств их коэффициентов

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 13/V 1985)

0. Рассмотрим задачу

$$Lu\equiv-\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)=f(x),\quad u\Big|_{\partial\Omega}=0,\ f\in L_2(\Omega) \tag{0.1}$$

в ограниченной области $\Omega(x)(x=(x_1,x_2))$ с границей $\partial\Omega$ из C^∞. Пусть $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$ и $a_{ij}(x)\in C^\infty(\Omega)$. Положим $\mathfrak{M}\equiv\{u\,|\,\|Lu\|_{L_2(\Omega)}\leqslant 1\}$, $\nu_L(x)\equiv\inf\limits_{\xi_1,\xi_2\in R_1,(\xi_1,\xi_2)\neq(0,0)}(\xi_1^2+\xi_2^2)^{-1}\sum\limits_{i,j=1}^{2}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$, $\alpha\equiv\inf\limits_{x\in\Omega}\nu_L(x)$.

Пусть $\hat{v}$—приближенное решение задачи (0.1), полученное ВРМ с кусочно-линейными базисными функциями (см. ([1])). Тогда ([1]) для любого $N\geqslant N_0$(N_0 зависит от свойств Ω) имеют место неравенства

$$d_N(L)\leqslant\sup_{u\in\mathfrak{M}_L}\|u-\hat{v}\|_{1,\Omega}\leqslant C(\alpha)d_N(L), \tag{0.2}$$

где $d_N(L)\equiv\inf\limits_{H_N\subset W_2^1(\Omega)}\sup\limits_{u\in\mathfrak{M}_L}\inf\limits_{v\in H_N}\|u-v\|_{1,\Omega}$, $\|\cdot\|_{1,\Omega}$—норма в $W_2^1(\Omega)$, H_N—произвольное линейное подпространство $W_2^1(\Omega)$ размерности N и тем самым $d_N(L)$—поперечник А. Н. Колмогорова. Здесь $C(\alpha)$—постоянная, зависящая от α.

На основании неравенств (0.2) ВРМ с кусочно-линейными базисными функциями являются оптимальными по порядку точности в классе всех методов приближенного решения задачи (0.1), в которых решение ищется в виде элемента пространства H_N. Однако при этом постоянная $C(\alpha)$ может быть как угодно большой при достаточно малых α.

В настоящей статье для некоторого класса E задач (0.1) вводится энергетическое пространство $W_{2,L}^1(\Omega)$ со скалярным произведением $[\cdot,\cdot]$ и соответствующей нормой $\|[\cdot]\|_\Omega$; строится такое N-мерное подпространство $H_N(L)$ пространства $W_{2,L}^1(\Omega)$, что имеют место неравенства

$$\tilde{d}_N(L)\leqslant\sup_{u\in\mathfrak{M}_L}\inf_{v\in H_N(L)}\|[u-v]\|_\Omega\leqslant C\tilde{d}_N(L) \tag{0.3}$$

для любого $N\geqslant N_0$(N_0 зависит от L). Здесь C—постоянная, единая для всего класса E, $\tilde{d}_N(L)\equiv\inf\limits_{K_N}\sup\limits_{u\in\mathfrak{M}_L}\inf\limits_{v\in K_N}\|[u-v]\|_\Omega$, $K_N\in\{K_N\}$, $\{K_N\}$ семейство N-мерных подпространств пространства $W^1_{2,L}(\Omega)$, включающее $H_N(L)$. При построении $H_N(L)$ распределение узлов сетки производится неравномерно в зависимости от поведения $\nu_L(x)$.

1. Введем класс $E=E(X_1(\varepsilon_1), \ldots, X_n(\varepsilon_n))$ задач (0.1). Мы скажем, что задача (0.1) является задачей класса E, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) Можно выбрать величину R такую, что $C_0<R<C_1$* и круги радиуса R, касательные к $\partial\Omega$, не имеют с $\partial\Omega$ иных общих точек, кроме точек касания, причем круги, касающиеся внутренним образом, лежат в $\overline{\Omega}$.

б) Условия на коэффициенты оператора L:

$б_1$) функция $\nu_L(x)$ имеет локальные минимумы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ в $\overline{\Omega}$ ($\varepsilon_i>0$, $1\leqslant i\leqslant n$), которые достигаются на множествах $X_1, \ldots, X_n$ соответственно;

$б_2$) область Ω можно разбить на подобласти $\omega_1, \ldots, \omega_m$ ($\operatorname{diam}\omega_j=O(1)$, $1\leqslant j\leqslant m$) так, чтобы выполнялись следующие условия:

$б_{2,1}$) в каждом $\omega_j\bigcup(\partial\omega_j\bigcap\partial\Omega)$, $1\leqslant j\leqslant m$, находится не более одного множества из $\{X_i\}_{i=1}^n$, и каждое X_i, $1\leqslant i\leqslant n$, находится только в одном из $\omega_j\bigcup(\partial\omega_j\bigcap\partial\Omega)$, $1\leqslant j\leqslant m$;

$б_{2,2}$) каждое $\partial\omega_j$, $1\leqslant j\leqslant m$, можно покрыть дважды непрерывно дифференцируемыми кривыми, количество которых ограничено универсальной постоянной (УП);

$б_{2,3}$) для произвольной точки из $\partial\omega_j$, $1\leqslant j\leqslant m$, можно построить кусочно-гладкий путь, лежащий в $\bigcup\limits_{j=1}^{m}\partial\omega_j$ и соединяющий эту точку с некоторой точкой из $\partial\Omega$, длина которого (пути) ограничена УП;

$б_{2,4}$) можно выбрать n чисел $R_1, \ldots, R_n$ ($R_i=O(1)$, $1\leqslant i\leqslant n$) так, что если X_i лежит на $\partial\Omega$, то $\bigcup\limits_{x\in X_i}(B_{R_i}(x)\bigcap\Omega)\subset\omega_j$ для некоторого j, $1\leqslant j\leqslant m$, где $B_{R_i}(x)$—круг радиуса R_i с центром в точке x, в случае, если X_i не лежит на $\partial\Omega$, имеет место соотношение $\bigcup\limits_{x\in X_i}B_{R_i}(x)\subset$ $\subset\omega_j$;

$б_{2,5}$) для каждой области ω_j, $1\leqslant j\leqslant m$, можно построить накрывающие области Ω_j и $\omega_j^*\subset\Omega$ такие, что $\omega_j\subset\omega_j^*\subset\Omega_j$, отношение расстояния между $\partial\omega_j^*$ и $\partial\omega_j$ к расстоянию между $\partial\omega_j$ и $\partial\Omega_j$ оценивается снизу УП; χ—коэффициент перекрытия ($\chi\equiv1+\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m} d_j$, где d_j—количество пересечений ω_j с областями $\{\Omega_j\}_{j=1}^m$), ограничен УП;

$б_{2,6}$) для каждого j, $1\leqslant j\leqslant m$, можно построить достаточно гладкие функции Ξ_j, равные единице в ω_j^* и нулю вне Ω_j, такие, что

$$\sup_{x\in\Omega_j}\left\{|\nabla\Xi_j(x)|^2+\sum_{i,k=1}^{2}\left|\frac{\partial^2\Xi_j}{\partial x_i\partial x_k}\right|^2\right\}<C_4. \tag{1.1}$$

---

* В статье приняты следующие обозначения. Буквой C с различными индексами обозначаются положительные константы, универсальные в том смысле, что они едины для рассматриваемого класса задач (нумерация действует в пределах одного пункта). Величина a считается порядка величины b ($a=O(b)$), если $C_2b<a<C_3b$. Аргументы функций опускаются, если они понятны из контекста.

$б_3$) условия локализации:

$б_{3,1}$) для каждого $D_j=\Omega_j\cap\Omega$, $1\leqslant j\leqslant m$, существует $M_j(\xi_{1,j}, \xi_{2,j})$ и такое достаточно гладкое преобразование $\mathcal{F}_j: D_j\to M_j$, что

$$\left|\frac{\partial x_k}{\partial \xi_{p,j}}\right|\leqslant C_5,\quad \left|\frac{\partial \xi_{k,j}}{\partial x_p}\right|\leqslant C_6,\quad \left|\frac{\partial^2 \xi_{k,j}}{\partial x_p\partial x_q}\right|\leqslant C_7,\quad \left|\frac{\partial^2 x_p}{\partial \xi_{k,j}\partial \xi_{q,j}}\right|\leqslant C_8, \tag{1.2}$$

где k, p, $q=1, 2$, и что в M_j оператор L в переменных $\xi_{1,j}$, $\xi_{2,j}$ имеет вид

$$L_j\equiv-\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_{1,j}}\left(\mathcal{P}_{1,j}(\xi_{1,j}, \xi_{2,j})\frac{\partial}{\partial\xi_{1,j}}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi_{2,j}}\left(\mathcal{P}_{2,j}(\xi_{1,j}, \xi_{2,j})\frac{\partial}{\partial\xi_{2,j}}\right)\right\}.$$

При этом для функций $u(\xi_{1,j}, \xi_{2,j})$, таких, что $u|_{\partial M_j}=0$, имеет место неравенство

$$(L_ju, u)\geqslant C_9(u, u), \tag{1.3}$$

где $\mathcal{P}_{i,j}(\xi_{1,j}, \xi_{2,j})>0$, $i=1, 2$, $1\leqslant j\leqslant m$, — ограниченные УП в M_j функции из класса $C^2(M_j)$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в L_2;

$б_{3,2}$) область $\omega_j\cap\left(\bigcup\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m} D_k\right)$ лежит во внутренней приграничной к $\partial\omega_j\setminus(\partial\omega_j\cap\partial\Omega)$ полосе $\omega_{j,\delta}$ — множестве точек ω_j, расстояние от которых до $\partial\omega_j\setminus(\partial\omega_j\cap\partial\Omega)$ не превосходит $\delta=O(1)$, $1\leqslant j\leqslant m$;

$б_{3,3}$) в областях $\mathcal{F}_j(\omega_{j,\delta})$ — коэффициенты $\mathcal{P}_{i,j}=O(1)$, $i=1, 2$, $1\leqslant j\leqslant m$;

$б_{3,4}$) для задачи

$$L_ju=g,\quad u\Big|_{\partial M_j}=0,\quad g\in L_2(M_j),\quad 1\leqslant j\leqslant m, \tag{1.4}$$

которую назовем стандартной, соблюдается неравенство

$$\int\limits_{\omega}\sum_{i,k=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_{i,j}\partial\xi_{k,j}}\right)^2 d\xi_{1,j}d\xi_{2,j}\leqslant C_{10}\int\limits_{M_j} g^2 d\xi_{1,j}d\xi_{2,j}, \tag{1.5}$$

где ω — произвольная подобласть M_j такая, что в ней $\mathcal{P}_{i,j}=O(1)$, $i=1, 2$; кроме того, можно построить $\hat{v}_j$ приближенное решение (1.4), полученное ВРМ с базисными функциями $\{\Phi_k\}_{k=1}^{N_j}$ некоторого N_j-мерного подпространства $H_{N_j}(L)$ пространства

$$W^1_{2,L}(M_j)\equiv\left\{w\,|\,[[w]]_{M_j}\equiv\left(\int\limits_{M_j}\sum_{i=1}^{2}\mathcal{P}_{i,j}\left(\frac{\partial w}{\partial\xi_{i,j}}\right)^2 d\xi_{1,j}d\xi_{2,j}\right)^{1/2}<\infty\right\},$$

причем имеет место следующее соотношение:

$$[[u-\hat{v}_j]]_{M_j}=O(\inf_{v\in H_{N_j}(L)}[[u-v]]_{M_j}),$$

для $N_j\geqslant N_j^0$, N_j^0 зависит от свойств $\mathcal{P}_{i,j}$, $i=1, 2$;

$б_{3,5}$) в общей части различных D_j и D_k базисные функции одинаковы, т. е. базисная функция пространства $H_{N_j}(L)$, имеющая в переменных x_1, x_2 носитель в D_k, является также базисной функцией пространства $H_{N_k}(L)$;

б$_{3.6}$) между базисными функциями и внутренними узлами сеточной области $M_{j.in}$ (см. ([1])) имеется биекция, и каждая из базисных функций равна единице в соответствующем узле и нулю во всех остальных;

б$_{3.7}$) существует постоянная C_{11}, такая, что при $N_j \geqslant C_{11}$ объединение носителей базисных функций (в переменных x_1, x_2), пересекающихся с ω_j, лежит в ω_j^*, $1 \leqslant j \leqslant m$;

б$_{3.8}$) имеет место неравенство

$$\|[u-\hat{u}]\|^2_{M_j} \leqslant C_{12}|d_{N_j}(L)|^2 \int\limits_{M_j} g^2 d\xi_{1,j} d\xi_{2,j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{1.6}$$

где u — решение задачи (1.4), $\hat{u} = \sum\limits_k u(\xi_{1,j}^{(k)}, \xi_{2,j}^{(k)}) \Phi_k(\xi_{1,j}, \xi_{2,j})$, $\hat{u}\Big|_{\partial M_{j,in}} = 0$, $(\xi_{1,j}^{(k)}, \xi_{2,j}^{(k)})$ — k-й внутренний узел сеточной области $M_{j,in}$,

$$d_{N_j}(L) \equiv \inf_{H_{N_j} \subset W^1_{2,L}(M_j)} \sup_{u \in \mathfrak{m}_{L_j}} \inf_{v \in H_{N_j}} \|[u-v]\|_{M_j};$$

б$_{3.9}$) для произвольного $H_{N_j} \subset W^1_{2,L}(M_j)$ существует функция u такая, что $\operatorname{supp} u_j \subset \mathcal{F}_j(\omega_j)$,

$$\inf_{v \in H_{N_j}} \|[u_j - v]\|_{\mathcal{F}_j(\omega_j)} \geqslant C_{13} d_{N_j}(L), \quad \int\limits_{M_j} (L_j u_j)^2 d\xi_{1,j} d\xi_{2,j} \leqslant C_{14}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{1.7}$$

Введем гильбертово пространство $W^1_{2,L}(\Omega)$ со скалярным произведением $[w, v] \equiv \sum\limits_{j=1}^{m} \int\limits_{\omega_j} \sum\limits_{i=1}^{2} \mathcal{P}_{ij} \dfrac{\partial w}{\partial \xi_{i,j}} \dfrac{\partial v}{\partial \xi_{i,j}} d\Omega$ и нормой $\|[\,\cdot\,]\|_\Omega$.

Обозначим через N суммарное количество различных базисных функций в Ω и через $H_N(L)$ — линейное пространство, натянутое на эти функции. Из ограниченности коэффициента перекрытия χ УП следует, что $N = O\left(\sum\limits_{j=1}^{m} N_j\right)$.

Определим, наконец, семейство $\{K_N\}$ из $W^1_{2,L}(\Omega)$. Мы скажем, что $K_N \in \{K_N\}$, если базисные функции K_N удовлетворяют следующим условиям: 1) объединение носителей базисных функций, пересекающихся с ω_j, лежит в D_j; 2) пространство $K_{N_j}(D_j)$, образованное сужением функций из K_N на D_j, имеет размерность порядка количества базисных функций, носители которых пересекаются с ω_j.

Теорема. *Пусть в области* Ω *решается задача* (0.1) *из класса E. Тогда имеют место неравенства* (0.3), *т. е. ВР схема с базисными функциями пространства* $H_N(L)$ *является оптимальной по порядку точности в классе всех методов приближенного решения задачи* (0.1), *в которых решение ищется в виде элемента произвольного пространства* $K_N \in \{K_N\}$.

2. В этом пункте приведем два примера стандартных задач.

А. Задача с точечной „особенностью" в единичном круге $M(\xi, \eta)$:

$$Lu \equiv -\left\{\frac{\partial}{\partial \xi} Q(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} Q(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \eta}\right\} = f(\xi, \eta), \quad f \in L_2(M), \; u\Big|_{\partial M} = 0.$$

Здесь $Q(\xi, \eta) = \varepsilon + P(\xi, \eta) r^2$, $r^2 = \xi^2 + \eta^2$, $P = O(1)$, $|\nabla P| \leqslant C_0$.

Б. Задача с линиевой „особенностью" на границе в квадрате $M(\xi, \eta) = \{0 \leqslant \xi \leqslant \pi, \; 0 \leqslant \eta \leqslant \pi\}$:

$$Lu \equiv -\left\{\frac{\partial}{\partial \xi} Q(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right\} = f(\xi, \eta), \quad f \in L_2(M), \; u\Big|_{\partial M} = 0.$$

Здесь $Q(\xi, \eta) = \mathscr{E}(\eta) + \xi P(\xi, \eta)$ такова:

α) для $\forall \eta \in [0, \pi]$ имеет место $\mathscr{E}(\eta) = O(\varepsilon)$;

β) для $\forall (\xi, \eta) \in M$ выполняются соотношения

$$P = O(1), \; |Q_\xi| = O(1), \; |Q_\eta| \leqslant C_1 Q, \; |Q_{\xi\xi}| \leqslant C_2, \; |Q_{\xi\eta}| \leqslant C_3$$

Всесоюзный НИИ комплексного электрооборудования

Ա. Դ. ՋԱՎԱԴՅԱՆ

Ցանցի կախումը էլիպտիկ հավասարման գործակիցներից վարիացիոն-տարբերական մեթոդում

Դիցուք վարիացիոն-տարբերական մեթոդով ստանում ենք հետևյալ խնդրի մոտավոր լուծումը՝

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) = f(x), \; x \equiv (x_1, x_2) \in \Omega, \; u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \; f \in L_2(\Omega)$$

և $\nu \equiv \inf\limits_{\xi_1, \xi_2 \in R_1, (\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)} (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1} \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$ *կարող է լինել կամայական փոքր։ Հոդվածում ելնելով* a_{ij} *գործակիցների լոկալ հատկություններից տրվում է օպտիմալ ցանցի խտացման օրենքը բավականաչափ լայն խնդիրների դասի համար։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец,* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1979 [2] *О. А. Ладыженская,* Краевые задачи математической физики, Наука, М., 1973. [3] *Д. Гильберт, Р. Курант,* Методы математической физики, ч. I, Гостехиздат, М.—Л., 1933.