

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

В. Г. Саакян

Об асимптотическом поведении времен ожидания в приоритетных моделях $\bar{M}_r/\bar{G}_r/1/\infty$ при дисциплине RS

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 5/VII 1984)

За последние десятилетия теория массового обслуживания превратилась в широкое научное направление исследования операций. По мере усложнения реальных систем, вызванного развитием информационно-вычислительных систем и автоматизированных систем управления, усложнялись соответствующие математические модели. Результатом этого явилась необходимость изучения методами математической теории массового обслуживания приоритетных моделей, среди которых особое место по своей практической и теоретической ценности занимают модели с относительными и абсолютными приоритетами.

Важной характеристикой моделей с ожиданием является виртуальное время ожидания $w_k(t)$ ($k=\overline{1, r}$) вызова k -го приоритетного потока (k -вызова) в момент t , которое зависит от дисциплины, принятой внутри потока k -вызовов (число потоков равно r).

Большое количество публикаций посвящено изучению $w_k(t)$ ($k=\overline{1, r}$), когда в качестве дисциплины обслуживания внутри k -го потока приняты $FIFO$ („первым пришел — первым обслужен“) или $LIFO$ („последним пришел — первым обслужен“). Очень мало изучены модели при дисциплине RS (случайный выбор на обслуживание), что вызвано более сложной по сравнению с $FIFO$ и $LIFO$ структурой порядка обслуживания^(1,2). Публикациям^(1,2) предшествовали работы^(3,4) для модели $M/G/1/\infty$ с одним входящим потоком.

Настоящая работа посвящена асимптотическому при $t \rightarrow \infty$ изучению поведения $w_k(t)$ ($k=\overline{1, r}$) в моделях $\bar{M}_r/\bar{G}_r/1/\infty$ при дисциплине RS обслуживания k -вызовов.

Опишем рассматриваемые модели. На один обслуживающий прибор поступают r независимых потоков 1-вызовов, 2-вызовов, ..., r -вызовов с параметрами $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_r > 0$. Длительности обслуживания вызовов независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и для i -вызовов ($i=\overline{1, r}$) имеют функцию распределения $B_i(t)$. Допускается неограниченная очередь.

Поток i -вызовов, ..., j -вызовов ($1 \leq i \leq j \leq r$) назовем потоком $\overline{i, j}$ -вызовов.

Между потоками вызовов установлены дисциплины либо относительных (схема А), либо абсолютных приоритетов (схемы В: В1—до-

обслуживание прерванного вызова; В2—потеря; В3—обслуживание заново).

Внутри каждого приоритетного потока принята дисциплина RS , т. е. если на прибор должен поступить l -вызов ($l = \overline{1, r}$) и в очереди в этот момент $N(N \geq 1)$ l -вызовов, то любой из них выбирается на прибор с вероятностью $1/N$.

Пусть ρ_{l1} ($l = \overline{1, r}$)—загрузка модели $\overline{1, l}$ -вызовами, т. е. среднее время, необходимое для обслуживания поступающих в единицу времени в модель $\overline{1, l}$ -вызовов. ρ_{r1} называют загрузкой модели. Значения ρ_{k1} приведены, например, в (1). Условием существования стационарного распределения для $w_k(t)$ ($k = \overline{1, r}$) в схемах А и В при дисциплине RS служит условие $\rho_{k1} \leq 1$. Чем ближе к единице ρ_{k1} ($k = \overline{1, r}$), тем медленнее $w_k(t)$ сходится к своему стационарному значению при $t \rightarrow \infty$.

Цель настоящей работы заключается в описании характера сходимости $w_k(t)$ ($k = \overline{2, r}$) к предельному значению при $t \rightarrow \infty$, когда $\rho_{k1} \uparrow 1$; $\rho_{k1} = 1$; $\rho_{k-11} \uparrow 1$, $\rho_{k1} = 1$.

Для дальнейшего анализа величин $w_k(t)$ ($k = \overline{1, r}$) предположим выполненными следующие условия (I_k).

В схемах А и В1 для $\beta_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} dB_i(t)$ ($i = \overline{1, k}$) при $s \downarrow 0$ справедливо представление $\beta_i(s) = 1 - \beta_{i1}s + \alpha_i s^{\gamma(i)}(1 + o(1))$ ($1 < \gamma(i) \leq 2$),

где $\beta_{i1} = \int_0^\infty t dB_i(t)$, α_i —положительная константа.

В схемах В2 и В3 последнее представление предполагаем выполненным лишь для первого потока.

Положим ($k = \overline{1, r}$): $\gamma_k = \begin{cases} \min\{\gamma(1), \dots, \gamma(k)\}, & \text{для схем А и В1;} \\ \gamma(1), & \text{для схем В2 и В3,} \end{cases}$

$L_k = \begin{cases} \{l: 1 \leq l \leq k, \gamma(l) = \gamma_k\}, & \text{для схем А и В1;} \\ \{1\}, & \text{для схем В2 и В3,} \end{cases}$

$$B_k = \sum_{l \in L_k} \alpha_l \alpha_l, \quad \lambda_k = \gamma_k / (\gamma_k - 1)$$

Нам потребуются так называемые условия критической загрузки J_{pk} , которые создаются следующим образом:

Пусть $\rho_{k1} \uparrow 1$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}$ —фиксированы, p —номер первого из потоков, для которого $\rho_{k1} \uparrow 1$. Функции распределения $B_l(t)$ ($l = \overline{1, r}$) фиксированы. Существуют пределы $\bar{c}_l = \lim_{\rho_{k1} \uparrow 1} c_l(l = \overline{p, k})$, где $\rho_l = 1 - \rho_{l1}$ и $c_l = \rho_{l-11}^{-1} \rho_l$. Обозначим при $\rho_{p1} \uparrow 1$ $B = \lim B_p = \lim B_l$ ($l = \overline{p, k}$).

Введем в рассмотрение функцию $z = \Delta(s)$, $\Delta(0) = 0$, которая является решением уравнения $z + z^{1/p} = s$. Свойства функции $\Delta(s)$ изучены в (2). Используя введенные обозначения, сформулируем утверждения, описывающие асимптотическое поведение $w_k(t)$ ($k = \overline{2, r}$) в модели $\bar{M}_r/\bar{G}_r/1/\infty$ при дисциплине RS , принятой внутри потока k -вызовов.

Теорема 1. Пусть выполнены условия I_k и J_{pk} . Тогда

1) если $\bar{c}_k = 0$ и $t \rightarrow \infty$ таким образом, что $t\rho_{k-1}^\lambda B^{1-\lambda} p \rightarrow \tau$ ($0 < \tau \leq \infty$), то существует предел

$$\lim P\{\rho_{k-1}^\lambda B^{1-\lambda} p w_k(t) < x\} = W_{k\tau}(x) \quad (x \geq 0),$$

$$\text{где } w_{k\tau} = \int_0^\infty e^{-sx} dW_{k\tau}(x) = \int_0^\infty e^{-v+\tau(\Delta v + (sv)^{\gamma_p})} \left\{ 1 - sv \int_0^\tau e^{-(sv + (sv)^{\gamma_p})y} dN_1(y) \right\} dv;$$

$$\int_0^\infty e^{-sy} dN_a(y) = \{a^\lambda p^{-1} \Delta(sa^{-\lambda} p)\}^{-1} \quad (0 < a < \infty);$$

2) если $\bar{c}_k > 0$ и $t \rightarrow \infty$ таким образом, что $t\rho_{k-1}^\lambda B^{1-\lambda} p \rightarrow \tau$ ($0 < \tau \leq \infty$), то существует предел $\lim P\{\rho_{k-1}^\lambda B^{1-\lambda} p w_k(t) < x\} = U_{k\tau}(x) \quad (x \geq 0)$,

$$\text{где } u_{k\tau}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dU_{k\tau}(x) =$$

$$\begin{aligned} &= - \int_0^{\varphi_k(s)} e^{-sv} \left\{ 1 - \Delta(s + (1 - \bar{c}_k)\Delta(sv)) \int_0^\tau e^{-sy} dN_{\bar{c}_k}(y) - \right. \\ &\quad \left. - (\Delta(s + (1 - \bar{c}_k)\Delta(sv)) - \Delta(sv))(1 - \bar{c}_k) \int_0^\tau \int_0^{s-z} e^{-(s + (1 - \bar{c}_k)\Delta(sv))y - sz} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot dF_{kz}(y) dz \right\} \exp \left\{ - \int_0^{\Delta(sv)} \frac{du}{\Delta(s + (1 - \bar{c}_k)u) - u} \right\}; \int_0^\infty e^{-sy} dF_{kz}(y) = \\ &= \exp \{ z(\bar{c}_k \Delta(s) + \Delta^{\gamma_p}(s)) \} \cdot \left\{ 1 - \Delta(s) \int_0^z e^{-\bar{c}_k \Delta(s) + \Delta^{\gamma_p}(s)v} dN_{\bar{c}_k}(v) \right\}; \\ &\varphi_k(s) = 1 + (1 - \bar{c}_k) \Delta(s \bar{c}_k^{-\lambda} p) \bar{c}_k^{-\lambda} p^{-1} s^{-1}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия $I_k, J_{p_{k-1}}$. Тогда, если $\rho_k = 0$ и $t \rightarrow \infty$ таким образом, что $t\rho_{k-1}^\lambda B^{1-\lambda} p \rightarrow \tau$ ($0 < \tau < \infty$), то существует предел $\lim P\{\rho_{k-1}^\lambda B^{1-\lambda} p w_k(t) < x\} = \Phi_{k\tau}(x) \quad (x \geq 0)$,

$$\begin{aligned} \text{где } \varphi_{k\tau}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} d\Phi_{k\tau}(x) = \\ &= \int_0^\infty e^{-v+\tau\Delta^{\gamma_p}(sv)} \left\{ 1 - \frac{\Delta(sv)}{\Gamma(1/\gamma_p)} \int_0^\tau e^{-u\Delta^{\gamma_p}(sv)} \frac{du}{u^{1-\gamma_p-1}} \right\} dv. \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия I_k . Тогда, если $\rho_k = 0$, $t \rightarrow \infty$, то существует предел $\lim P\{\rho_{k-1}(Bt)^{-1/\gamma_k} w_k(t) < x\} = G_{\gamma_k}(x) \quad (x \geq 0)$,

$$\begin{aligned}
\text{շօժ} \quad g_{\gamma k}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} dG_{\gamma k}(x) = \\
&= \int_0^{\infty} e^{-v+(sv)^{\gamma k}} \left\{ 1 - \frac{sv}{\Gamma(1/\gamma k)} \int_0^1 e^{-(sv)^{\gamma k} \cdot y} \cdot y^{1/\gamma k - 1} dy \right\} dv.
\end{aligned}$$

Доказательства всех трех теорем основаны на использовании аналогичных приведенным выше результатов для дисциплины *FIFO*, которые доказаны в (1).

Выражаю признательность Э. А. Даниеляну за внимание к настоящей работе.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Վ. Կ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

RS սպասարկման դիսցիպլինով $\vec{M}_r/\vec{G}_r/1/\infty$ գերազառ համակարգերում սպասման ժամանակների ասիմպտոտիկ վարքի մասին

Աշխատանքում դիտարկվում են $\vec{M}_r/\vec{G}_r/1/\infty$ մոդելները: Տարբեր հոսքերի պահանջների միջև սահմանված են հարաբերական կամ բացարձակ գերադասություններ, իսկ միեւնույն հոսքի պահանջները սպասարկվում են պատահական ընտրությամբ:

Դիցուք ρ_{k1} -ը ($k=1, r$) — համակարգի ժանրաբեռնվածությունն է առաջին k հոսքերի պահանջներով:

Եթե $\rho_{k1}=1$ կամ ձգտում է մեկի, ապա k -րդ հոսքի պահանջի t պահին վերտույն սպասման ժամանակը $w_k(t)$ անվերջ աճում է $t \rightarrow \infty$ դեպքում:

Պահանջների սպասարկման ժամանակի բաշխման ֆունկցիաների վրա դրված որոշակի մոմենտային սահմանափակումների դեպքում, երբ $t \rightarrow \infty$ k կամ

$$\rho_{k1} \uparrow 1, \text{ կամ } \rho_{k-11} \uparrow 1, \rho_{k1}=1, \text{ կամ } \rho_{k1}=1,$$

որոշված են այնպիսի նորմավորող $\varphi(\rho_k, t)$ ֆունկցիաներ, որ գոյություն ունի հետևյալ սահմանը՝ $\lim P\{\varphi(\rho_k, t)w_k(t) < x\}$:

Ստացված սահմանը հանդիսանում է սեփական բաշխման ֆունկցիա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Э. А. Даниелян, Математическая теория приоритетных моделей $M_r/G_r/1/\infty$, Докт. дис., Ереван, 1981 ² В. Ф. Матвеев, И. Г. Харитонцева, Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика, № 2, 1983. ³ J. F. C. Kingman, Proceedings Cambridge Philosophical Society, v. 58 (86), p. 79—91 (1962). ⁴ B. W. Conolly, Lecture Notes in Queueing Theory, John Wiley and Sons, 1975.