

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Х. Дарбинян

Одно достаточное условие для гамильтоновости орграфов с большими полустепенями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 8/VI 1984)

Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в (1). Пусть G — оргграф. Через $V(G)$ обозначается множество вершин G , а через $E(G)$ множество его дуг. Для $A, B \subseteq V(G)$ и $x \in V(G)$ введем обозначения:

$$E(A \rightarrow B) = \{yz \in E(G) / y \in A, z \in B\};$$

$$O(x) = \{y \in V(G) / xy \in E(G)\}; \quad I(x) = \{y \in V(G) / yx \in E(G)\}.$$

Через $\langle A \rangle$ обозначается подграф, порожденный множеством A . Число $d(x) = od(x) + id(x)$ называется степенью вершины x , где $id(x)$ полустепень захода, а $od(x)$ полустепень исхода. Запись $A \Rightarrow B$ означает, что если $y \in A$ и $z \in B$, то $yz \in E(G)$. Если H — граф, то через H^* обозначим оргграф, который получается из H после замены каждого его ребра (xy) двумя дугами xu и ux . Обозначение $G_1 \subseteq G$ означает, что G_1 является подграфом G , а $E(x, y) = \emptyset$ означает, что вершины x и y не смежны. $\bar{G}$ — оргграф, обратный к G .

В (2) найдено достаточное условие гамильтоновости $(2n+1)$ -вершинного оргграфа с минимальными полустепенями исхода и захода не меньшими n . В настоящей статье приводится достаточное условие гамильтоновости $2n$ -вершинного ($n \geq 2$) оргграфа с минимальной степенью не меньше $2n-1$ и с минимальными полустепенями исхода и захода не меньшими $n-1$. Кроме того, показывается, что любой p -вершинный ($p \geq 4$) оргграф G с минимальной степенью не меньше $p-1$ и с минимальными полустепенями не меньшими $[(p-1)/2]$ содержит контур длины $p-1$ (кроме некоторых простых случаев).

Для формулировки теорем определим оргграфы H_1, H'_1 и класс оргграфов $H(n, n), H(n, n-1)$.

H_1 — $2n$ -вершинный оргграф с $V(H_1) = D_1 \cup D_2 \cup \{x_1, x_2\}$, для которого $\langle D_1 \rangle \cong \langle D_2 \rangle \cong K_{n-1}^*$; $O(x_1) = \{x_2\} \cup D_1$; $I(x_1) = D_1 \cup D_2$; $O(x_2) = D_1 \cup D_2$ и $I(x_2) = \{x_1\} \cup D_2$.

H'_1 — оргграф, полученный из H_1 , после добавления дуги x_2x_1 .

$H(n, n)$ — множество $2n$ -вершинных оргграфов G , для которых $V(G) = A_1 \cup A_2$; $\langle A_1 \rangle \cong \langle A_2 \rangle \cong K_n^*$; $E(A_2 \rightarrow A_1) = \emptyset$ и для любой вершины $x \in A_1$ (соответственно $y \in A_2$) существует такая вершина $x_1 \in A_1$ ($y_1 \in A_2$), что $xx_1 \in E(G)$ ($y_1y \in E(G)$).

Скажем, что $2n$ -вершинный оргграф G принадлежит классу $H(n, n,$

$n-1$), если множество его вершин можно разбить на три подмножества B_1 , B_2 и $\{x\}$, где $|B_1|=n$, $|B_2|=n-1$, таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

- а) для любых $z_1 \in B_1$ и $z_2 \in B_2$ $z_1 z_2, z_2 z_1 \in E(G)$;
- б) $E(\langle B_1 \rangle) = \emptyset$;
- в) либо $I(x) = B_2$ и $\{x\} \rightarrow B_1$, либо $O(x) = B_2$ и $B_1 \rightarrow \{x\}$.

Теорема 1. Пусть G — p -вершинный ($p \geq 4$) орграф с минимальной степенью не меньше $p-1$ и минимальными полустепенями не меньшими $\lfloor (p-1)/2 \rfloor$. Тогда G содержит контур длины $p-1$, кроме случаев, когда $G \in \{C_n^*, H_1, H_1', [(K_n \cup K_n) + K_1]^* \} \cup H(n, n)$ или $G \subseteq K_{n,n}^*$, где $n = \lfloor p/2 \rfloor$.

Теорема 2. Пусть G — $2n$ -вершинный ($n \geq 2$) орграф с минимальной степенью не меньше $2n-1$ и с минимальными полустепенями не меньшими $n-1$. Тогда либо G — гамильтонов, либо $G \in H(n, n) \cup H(n, n-1) \cup \{H_1, H_1', H_2, H_2'\}$, где H_2 — 6-вершинный орграф, изображенный на рис. 1, а H_2' — орграф, полученный из H_2 после добавления дуги $x_2 x_4$.

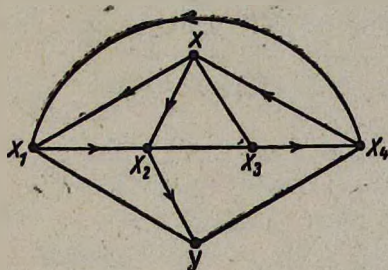


Рис. 1

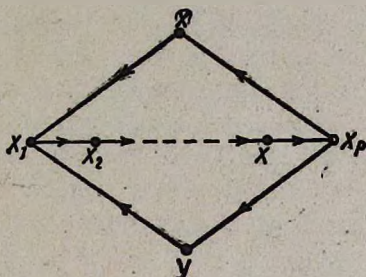


Рис. 2

Приведем лишь схему доказательства теоремы 2.

Пусть орграф G удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда нетрудно убедиться, что либо G сильно связный, либо $G \in H(n, n)$. Предположим, что G сильно связный и для него утверждение теоремы 2 неверно. Тогда по теореме 1 G содержит контур длины $2n-1$. Пусть $\bar{C}_{2n-1} : (x_1 x_2 \dots x_{2n-1} x_1)$ произвольный контур длины $2n-1$ в G и $x \notin V(\bar{C}_{2n-1})$. Легко заметить, что $d(x) = 2n-1$ и для некоторого i , $1 \leq i \leq 2n-1$, имеет место $E(x, x_i) = \emptyset$. Далее из $E(x, x_i) = \emptyset$ вытекает, что $x_{i-1}x, xx_{i+1} \in E(G)$ и $d(x_i) = 2n-1$ (индексы вершин контура $\bar{C}_{2n-1}$ берутся по $\text{mod}(2n-1)$). Не нарушая общности, можем предполагать, что $E(x, x_{2n-1}) = \emptyset$. Пусть $p = 2n-2$ и $y = x_{2n-1}$. Тогда $\{x_p\} \rightarrow \{x, y\}$ и $\{x, y\} \rightarrow \{x_1\}$ (рис. 2).

Для любой вершины $z \in \{x, y\}$ пусть

$$A(z) = \{x_i / zx_{i+1} \in E(G), 1 \leq i \leq p-2\};$$

$$B_1(z) = \{x_i / x_{i-1}z \in E(G), 3 \leq i \leq p\};$$

$$B_2(z) = \{x_i / x_{i-1}z \in E(G), 2 \leq i \leq p-1\}.$$

Далее доказываются следующие утверждения:

Пусть $\{u, v\} = \{x, y\}$. Тогда

1°. Если $x_{p-1}u \in E(G)$, то $E(A(v) \rightarrow x_p) = \emptyset$.

2°. Если $ux_2 \in E(G)$, то $E(x_1 \rightarrow B_1(v)) = \emptyset$.

3°. Если $x_{p-1}u$, $\forall x_p \in E(G)$, то $E(x_p \rightarrow B_1(v)) = \emptyset$.

4°. Если $\{x_{p-1}\} \rightarrow \{u, v\}$, то $od(u) = od(v) = p-1$ и $O(u) = O(v)$.

5°. Если $\{u, v\} \rightarrow \{x_2\}$, то $id(u) = id(v) = p-1$ и $I(u) = I(v)$.

6°. $|E(\{x_{p-1}\} \rightarrow \{u, v\})| \leq 1$ и $|E(\{u, v\} \rightarrow x_2)| \leq 1$.

7°. Вершина u не смежна с некоторой вершиной x_i , где $2 \leq i \leq p-1$.

8°. Для вершины u имеет место $x_{p-1}u \notin E(G)$ и $ux_2 \notin E(G)$.

Теперь, пользуясь утверждением 8°, докажем теорему 2. Из $d(x) = 2n-1$ следует, что $od(x) = n$ или $id(x) = n$. Не нарушая общности, можем предполагать, что $od(x) = n$. Тогда для некоторого i , $1 \leq i \leq 2n-3$, имеет место $\{x\} \rightarrow \{x_i, x_{i+1}\}$. Из 8° следует $xx_2 \notin E(G)$. Значит, $i \geq 3$ и $x_1x \in E(G)$. Следовательно, существует такое l , $2 \leq l \leq i-1$, что $E(x, x_l) = \emptyset$, $\{x\} \rightarrow \{x_{l+1}, x_{l+2}\}$ и $x_{l-1}x \in E(G)$. Рассмотрим контур $(x_{l+1}x_{l+2} \dots x_{2n-2}x_{2n-1}x_1x_2 \dots x_{l-1}xx_{l+1})$. Для этого контура имеет место $E(x, x_l) = \emptyset$, $\{x\} \rightarrow \{x_{l+1}, x_{l+2}\}$ и $x_{l-1}x \in E(G)$, а это противоречит утверждению 8°. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы 2.

Объединяя теорему 2 с теоремой Томассена (теорема 2 (2)), получим следующую теорему.

Теорема 3. Пусть G — p -вершинный ($p \geq 4$) орграф с минимальной степенью не меньше $p-1$ и с минимальными полустепенями не меньшими $\lfloor (p-1)/2 \rfloor$. Тогда G — гамильтонов, кроме случаев, когда $G \in H(n, n) \cup H(n, n-1) \cup \{H_1; H'_1; H_2; H'_2; D_5; D_7; [(K_n \cup K_n) + K_1]^*\}$ (оргграфы D_5 и D_7 определены в (2)), или $K_{n, n+1}^* \subseteq G \subseteq (K_n + K_{n+1})^*$, где $n = \lfloor p/2 \rfloor$.

Вычислительный центр

Академии наук Армянской ССР и

Ереванского государственного университета

Ս. Խ. ԴԱՐԻՆՅԱՆ

Մեծ կիսաստիճաններով կողմնորոշված գրաֆների համիլթոնյանության մի բավարար պայման

Դիտարկվում են վերջավոր կողմնորոշված գրաֆներ:

Ներկա աշխատանքում բերվում է համիլթոնյանության բավարար պայման 2n-գագաթների ($n \geq 2$) կողմնորոշված գրաֆների համար, որում ցանկացած գագաթի աստիճանը փոքր է (2n-1)-ից, իսկ կիսաստիճանների փոքր չեն (n-1)-ից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Ф. Харари, Теория графов, Мир, М., 1973. ² С. Thomassen, Long cycles in digraphs, Proc. London Math. Soc., v. 3, № 42 (1981).