ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXII 1986 1

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

А. Э. Еременко

К обратной задаче теории Р. Неванлинны

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 7/VI 1984)

Одним из основных результатов теории распределения значений мероморфных (в конечной плоскости) функций является соотношение дефектов

$$\sum_{a\in\overline{C}}\delta(a, f)\leqslant 2. \tag{1}$$

Здесь и далее используются стандартные обозначения теории мероморфных функций (см., например, ([1])). Д. Дрейсин ([2]) решил обратную задачу этой теории: для любых последовательностей $\{a_j\}\subset\overline{C}$ и $\{\delta_j\}$, $0<\delta_j\leqslant 1$, $\sum\delta_j\leqslant 2$, найдется мероморфная функция f такая, что $\delta(a_j, f)=\delta_j$; $\delta(a, f)=0$, $a\notin\{a_j\}$. Эта функция имеет бесконечный порядок.

Не меньший интерес представляет решение обратной задачи в классе мероморфных функций конечного порядка. Отметим, например, что понятие дефекта для функции бесконечного порядка не вполне корректно, так как в этом случае дефекты сильно зависят от выбора начала координат. Для функций же конечного порядка такая зависимость устранима ([1]). До настоящего времени обратная задача теории Р. Неванлинны для функций конечного порядка решалась только при предположении, что множество дефектных значений конечно (и полностью решена при этом предположении в ([3]), см. также ([1])). Трудность обратной задачи с бесконечным множеством дефектных значений в классе функций конечного порядка обусловлена тем, что в этом случае дефекты удовлетворяют некоторым дополнительным соотношениям, кроме (1). Так, А. Вейцман ([4]), усиливая ряд предыдущих результатов, доказал, что для функций конечного (нижнего) порядка справедливо

$$\sum_{a\in\overline{C}}\delta^{1/3}(a, f)<\infty. \tag{2}$$

Далее, А. Вейцман ([5]) доказал, что если для функции f конечного (нижнего) порядка имеет место равенство в (1), то множество дефектных значений этой функции конечно, а Д. Дрейсин ([6]) показал, что в этом случае все дефекты суть рациональные числа.

Теорема 1. *Пусть* $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\overline{C}$, *и* $\{\delta_j\}_{j=1}^{\infty}$—*положительные числа со свойствами*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\delta_j<2,\quad \sum_{j=1}^{\infty}\delta_j^{1/3}<\infty,\quad \delta_j<1,\ j\in N. \tag{3}$$

Тогда существует мероморфная функция конечного порядка f такая, что $\delta(a_j, f)=\delta_j$, $j\in N$; $\delta(a, f)=0$, $a\notin\{a_j\}$.

Отметим, что порядок построенной функции зависит от заданной последовательности $\{\delta_j\}$. Кроме соотношений (1), (2) известны некоторые неравенства, в которые наряду с дефектами входит порядок функции (см., например, ([1])).

В силу цитированных результатов А. Вейцмана ([4,5]) первые два неравенства в (3) необходимы. Остановимся подробнее на неравенстве $\delta_j<1$, $j\in N$ в условии теоремы 1. Предположим, что выполняется $\delta(a, f)=1$ для некоторого $a\in\overline{C}$. Не уменьшая общности, можно считать, что $a=\infty$. Тогда функция f похожа на целую. Долгое время считалось правдоподобным, что целая функция конечного порядка может иметь лишь конечное множество дефектных значений. В 1966 г. Н. У. Аракелян впервые построил пример такой функции с бесконечным множеством дефектных значений ([7]). Точнее, для любого не более чем счетного множества $A\subset C$ и любого $\rho>\frac{1}{2}$ существует целая функция f порядка ρ такая, что $\delta(a, f)>0$ для всех $a\in A$ (и, возможно, еще для некоторых a). До настоящего времени эта теорема была единственным результатом о целых функциях конечного порядка с бесконечным множеством дефектных значений.

Теорема 2. *Для любого не более чем счетного множества $A\subset C$ и любого $\rho>1/2$ существует целая функция f порядка ρ такая, что $\delta(a, f)>0$ тогда и только тогда, когда $a\in A$.*

Эта теорема дает ответ на вопрос Н. У. Аракеляна, поставленный в ([8]) (задача 1.6, часть 1-я). Метод доказательства теоремы 2 отличается от метода Н. У. Аракеляна. При доказательстве теоремы 2 применяются квазиконформные деформации целых функций подобно тому, как это делается в работе ([9]). Д. Дрейсин сообщил автору, что также доказал теорему 2 методом работы ([9]).

По-видимому, дефекты целых функций конечного порядка подчинены некоторым соотношениям, более сильным, чем (2). Н. У. Аракелян высказал гипотезу о том, что для целой функции конечного порядка справедливо соотношение

$$\sum_{a\in C}\left(\log\frac{e}{\delta(a, f)}\right)^{-1}<\infty \tag{4}$$

(([8]), задача 1.6, часть 2-я). Эта гипотеза до настоящего времени не доказана, более того, неизвестно, можно ли для целых функций усилить соотношение (2). В примере Н. У. Аракеляна и в примере, который дается теоремой 2, ряд (4) сходится. Представляется правдоподобным, что если мероморфная функция конечного порядка имеет один дефект, равный 1, то выполняется (4). Если это верно, то ограничение $\delta_j<1$ в теореме 1 существенно.

Наряду с дефектами в последнее время рассматриваются отклонения

$$\beta(a, f)=\liminf_{r\to\infty}\log^{+}M(r, a, f)/T(r, f),$$

введенные В. П. Петренко. Свойства этих величин подробно исследованы в книге [10]. Если мероморфная функция f конечного (нижнего) порядка, то множество $\{a\in\overline{C}: \beta(a, f)>0\}$ не более чем счетно. Более того, в этом случае справедливо

$$\sum_{a\in\overline{C}} \beta^{1/2}(a, f)<\infty. \tag{5}$$

Этот результат [11] усиливает предыдущие теоремы В. П. Петренко и Г. А. Барсегяна. Оказывается, что (5) является единственным ограничением, которому должны удовлетворять отклонения мероморфных функций конечного порядка.

Теорема 3. *Пусть* $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\overline{C}$, *и* $\{\beta_j\}$*—положительные числа такие, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^{1/2}<\infty.$$

Тогда существует мероморфная функция f конечного порядка такая, что $\beta(a_j, f)=\beta_j$, $j\in N$; $\beta(a, f)=0$, $a\notin\{a_j\}$.

Разумеется, порядок функции f в теореме 3 зависит от последовательности $\{\beta_j\}$. Теоремы 1 и 3 доказываются одинаковым методом, который сходен с методом работы [12].

Автор благодарит В. С. Азарина, А. А. Гольдберга, Д. Дрейсина и М. Л. Содина за обсуждение этой работы.

Физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Ա. Է. ԵՐՅՈՄԵՆԿՈ

Ռ. Նևանլիննայի հակադարձ խնդրի մասին

Բերվում է Նևանլիննայի բաշխման տեսության հակադարձ խնդրի մասնակի լուծումը վերջավոր կարգի մերոմորֆ ֆունկցիաների դասում։ Այդ նույն ֆունկցիաների դասում Պետրենկոյի արժեքների բաշխման հակադարձ խնդրի լուծումը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Гольдберг, И. В. Островский*, Распределение значений мероморфных функций, М., Наука, 1970. [2] *D. Drasin*, Acta math., v. 138, 83—151 (1977). [3] *А. А. Гольдберг*, Укр. мат. журн., т 6, 387—397 (1954). [4] *A. Weitsman*, Acta math., v. 128, 41—52 (1972). [5] *A. Weitsman*, Acta math., v. 123, 115—139 (1969). [6] *D. Drasin*, Annals of Math., v. 114, 493—518 (1981). [7] *Н. У. Аракелян*, ДАН СССР, т. 170, №2, 999—1002 (1966). [8] *W. K. Hayman*, Research problems in function theory, Athlone Press, London, 1967. [9] *D. Drasin*, Ark. mat., v. 12, №2, 139—150 (1974). [10] *В. П. Петренко*, Рост мероморфных функций, Харьков, Вища школа, 1978. [11] *А. Э. Еременко*, Теория функций, функц. анализ и их прилож., вып. 40, 56—64 (1983). [12] *D. Drasin, A. Weitsman*, Advances in Math., v. 15, 93—126 (1975).