ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXII 1986 2

УДК 593.12.14

ФИЗИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР В. А. Джрбашян

К проверке следствия изотропности пространства

(Представлено 11/III 1983)

Как хорошо известно, в центрально-симметричном поле в силу изотропности трехмерного пространства при финитном движении частицы имеют определенный квадрат и проекцию момента количества движения.

Например, при движении в кулоновском поле, когда

$$E \leqslant 0, \tag{1}$$

волновая функция частицы удовлетворяет уравнениям

$$\hat{H}\psi = E\psi, \tag{2}$$

$$\hat{\vec{j}}^2\psi = \hbar^2 j(j+1)\psi, \tag{3}$$

$$\hat{j}_z\psi = \hbar M\psi, \tag{4}$$

т. е. состояния могут быть классифицированы по собственным значениям операторов полной энергии

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + q_n q_p/r \tag{5}$$

($\hat{H}_0$—свободный гамильтониан), квадрата и z-компоненты полного момента в традиционном понимании

$$\hat{\vec{j}} = \hat{\vec{L}}^r + \hat{\vec{s}}. \tag{6}$$

При инфинитном движении в кулоновском поле, когда энергии частицы

$$E \geqslant 0 \tag{7}$$

образуют непрерывный спектр и нерелятивистские, волновыми функциями являются известные выражения [1-4]

$$\psi = v_\mu F^{\pm}_{\vec{k}}, \tag{8}$$

где v_μ—спиновая функция частицы, а

$$F^{\pm}_{\vec{k}} = \sum_{lm} 4\pi i^l \exp[\pm i\xi_l](-1)^m Y_{l-m}(\vartheta_p\varphi_p) Y_{lm}(\vartheta_r\varphi_r)(kr)^{-1} f_l(kr) \tag{9}$$

на больших расстояниях представляют собой суперпозицию искаженной плоской и расходящейся или сходящейся волн. Этот факт известен из теории и экспериментов упругого и неупругого рассеяний в кулоновском поле, в частности, подтвержден измерениями Эльбека и Бокельмана (см. обзор [2]) угловых распределений рассеянных протонов при кулоновском возбуждении ядер.

Однако функции (8), будучи решениями уравнения (2), не являются решениями уравнений (3) и (4) с оператором (6) для $\hat{\vec{J}}$. Т. е. при $E>0$, в отличие от $E<0$, частица не имеет определенного полного момента в традиционном понимании. Но сохранение момента при движении есть следствие изотропности пространства [5], которое в рассматриваемом случае кулоновского поля (см. выражение (5)) является центрально-симметричным как при $E<0$, так и при $E>0$.

Решение этой проблемы найдено в работах [6–8], где показано что вследствие изотропности пространства частицы действительно имеют полный момент. Однако оператор последнего равен не $\hat{\vec{J}}$, определяемому формулой (6), а $\hat{\vec{J}}$, определяемому формулой

$$\hat{\vec{J}}=\hat{\vec{L}}^r+\hat{\vec{L}}^p+\vec{s},\ \text{где}\ \hat{\vec{L}}^r=-i\hbar[\vec{r}\,\vec{\nabla}_r],\ \hat{\vec{L}}^p=-i\hbar[\vec{p}\,\vec{\nabla}_p]. \tag{10}$$

Нетрудно убедиться, что волновые функции частицы в кулоновском поле как при $E\leqslant 0$ [9], так и при $E\geqslant 0$, равные в нерелятивистском случае выражению (8), являются собственными функциями* операторов энергии, квадрата и проекции на произвольную ось z полного момента (10). Т. е. в правильной теории уравнение (2) остается в силе, а уравнения (3) и (4) заменяются на

$$\hat{\vec{J}}^2\psi=\hbar^2 J(J+1)\psi \tag{11}$$

и

$$\hat{J}_z\psi=\hbar\mu\psi, \tag{12}$$

где J и μ равны j и M при $E<0$ и квантовым числам квадрата и z-компоненты спина при $E>0$.

При стремлении заряда источника поля q_n к нулю волновые функции (8) переходят в плоскую волну, т. е. в волновую функцию свободной частицы [10]. При этом не только не теряется изотропность пространства, вследствие чего плоская волна остается собственной функцией полного момента [6–8], но и восстанавливается также трансляционная инвариантность. Начало системы координат теперь не закреплено в точке источника поля, а может быть выбрано в любой точке пространства. Вследствие этого волновая функция свободной частицы является собственной функцией также оператора импульса.

Поскольку согласно (10) J_z и $\hat{\vec{J}}^2$ не зависят от времени, а частица находится в стационарном состоянии, то средние значения этих величин не зависят от времени. Тем не менее, имея в виду теорему об интегралах движения, докажем коммутацию операторов z-компоненты и квадрата полного момента с гамильтонианом Дирака

$$\hat{H}=c(\hat{\vec{\alpha}}\hat{\vec{p}}+\hat{\beta}Mc)=\frac{2c}{\hbar}\begin{pmatrix}0 & \hat{s}_k\\ \hat{s}_k & 0\end{pmatrix}\hat{p}_k+\hat{\beta}Mc^2,\quad \hat{p}_k=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{13}$$

Учитывая, что

* Это относится и к любому центрально-симметричному полю.

$$[\hat{s}_i, \hat{s}_k] = i\hbar e_{ikl}\hat{s}_l, \quad [\hat{L}_i^r, \hat{p}_k] = i\hbar e_{ikl}\hat{p}_l, \quad [\hat{L}_i^\rho, \hat{p}_k] = 0, \tag{14}$$

имеем

$$[\hat{J}_i, \hat{H}] = \left[\hat{L}_i^r + \hat{L}_i^\rho + \hat{s}_i, \ \frac{2c}{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & \hat{s}_k \\ \hat{s}_k & 0\end{pmatrix}\hat{p}_k + \beta Mc^2\right] =$$

$$= \frac{2c}{\hbar}\left\{\begin{pmatrix} 0 & \hat{s}_k \\ \hat{s}_k & 0\end{pmatrix} i\hbar e_{ikl}\hat{p}_l + i\hbar e_{ikl}\begin{pmatrix} 0 & \hat{s}_l \\ \hat{s}_l & 0\end{pmatrix}\hat{p}_k\right\} =$$

$$= 2ic\begin{pmatrix} 0 & \hat{s}_k \\ \hat{s}_k & 0\end{pmatrix}\{e_{ikl} + e_{ilk}\}\hat{p}_l = 0. \tag{15}$$

Используя этот результат, найдем, что

$$[\hat{J}_i^2, \hat{H}] = \hat{J}_i(\hat{J}_i\hat{H}) - \hat{H}\hat{J}_i^2 = \hat{J}_i\hat{H}\hat{J}_i - \hat{J}_i\hat{H}\hat{J}_i = 0. \tag{16}$$

$$[\hat{J}^2, \hat{H}] = \sum_{i=1}^{3}[\hat{J}_i^2, \hat{H}] = 0. \tag{17}$$

Таким образом согласно (15) и (17)

$$[\hat{J}_z, \hat{H}] = 0, \quad [\hat{J}^2, \hat{H}] = 0. \tag{18}$$

Условия возможности одновременного измерения разных физических величин общеизвестны. В частности, чтобы существовали состояния, в которых две величины L и M одновременно имели бы определенные значения $\overline{(\Delta L)^2} = 0$, $\overline{(\Delta M)^2} = 0$, нужно, чтобы волновая функция такого состояния была общей собственной функцией операторов $\hat{L}$ и $\hat{M}$ ([11]). Поскольку показано, что волновая функция свободной частицы ([6–8]) есть общая собственная функция $\hat{J}_z$, $\hat{J}^2$ и $\hat{\vec{p}}$, то этим и доказана возможность их одновременного измерения. Что касается вопроса коммутации $\hat{J}_z$ и $\hat{J}^2$ с $\hat{\vec{p}}$, то он представляет интерес скорее с точки зрения математики. Подставляя значения операторов, легко убедиться, что

$$[\hat{J}_i, \hat{p}_k] = i\hbar e_{ikl}\hat{p}_l,$$

т. е. J_z коммутирует с $\hat{p}_z$, но не коммутирует с p_x и p_y. Следовательно $\hat{J}_z$ не коммутирует с $\hat{\vec{p}}$ при произвольном направлении оси z, но имеет тем не менее общую с ним собственную функцию $\psi_{\vec{p}\mu}$. Т. е. имеет место исключительный случай. Такая возможность существует: если $\hat{L}\hat{M} \neq \hat{M}\hat{L}$, то величины L и M не имеют одновременно определенных значений (кроме, может быть, исключительных) ([11]). Один такой пример известен ([11]). Причина того, что некоммутирующие операторы $\hat{L}_z$ и $\hat{L}_x$ имеют при $L=0$ общую собственную функцию, заключается в том, что их собственные значения в состоянии с $L=0$ равны нулю:

$$\hat{L}_x Y_{00} = 0 \cdot Y_{00}, \quad \hat{L}_z Y_{00} = 0 \cdot Y_{00}, \quad (\hat{L}_x\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_x)Y_{00} = 0.$$

Но $\hat{L}_x$ и $\hat{L}_z$ не коммутируют, поскольку для произвольной функции $f(\vartheta, \varphi)$

$$(\hat{L}_x\hat{L}_z-\hat{L}_z\hat{L}_x)f=\sum_{Lm} c_{Lm}(\hat{L}_x\hat{L}_z-\hat{L}_z\hat{L}_x)Y_{Lm}\neq 0.$$

В нашем случае некоммутирующих операторов $\hat{J}_z$ и $\hat{\vec{p}}$ причина того, что известная теорема не имеет места, заключается в том, что $\hat{J}_z$ действует на собственное значение $\vec{p}$, т. е. $\frac{\partial}{\partial\varphi_p}\vec{p}\neq 0$. Действительно

$$\hat{J}_z\psi_{\vec{p}\mu}=\hbar\mu\psi_{\vec{p}\mu},\quad \hat{\vec{p}}\psi_{\vec{p}\mu}=\vec{p}\psi_{\vec{p}\mu},$$

$$\hat{p}_x\hat{J}_z\psi_{\vec{p}\mu}=p_x\hbar\mu\psi_{\vec{p}\mu},\ \hat{J}_z\hat{p}_x\psi_{\vec{p}\mu}=J_zp_x\psi_{\vec{p}\mu}=\left[\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi_p}p_x\right)+p_x\hbar\mu\right]\psi_{\vec{p}\mu},$$

$$(\hat{J}_z\hat{p}_x-\hat{p}_x\hat{J}_z)\psi_{\vec{p}\mu}=\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi_p}p\sin\vartheta_p\cos\varphi_p\right)\psi_{\vec{p}\mu}=i\hbar p\sin\vartheta_p\sin\varphi_p\psi_{\vec{p}\mu}=i\hbar p_y\psi_{\vec{p}\mu}.$$

Для произвольной функции f

$$(\hat{J}_z\hat{p}_x-\hat{p}_x\hat{J}_z)f=\sum_{\vec{p},\vec{J}^2,J_z} c_{\vec{p},\vec{J}^2,J_z}i\hbar p_y\psi_{\vec{p},\vec{J}^2,J_z}\neq 0.$$

Таким образом мы видим, что причина «нарушения» теоремы ([11]) заключается в невыполнении ее условия, заключающегося в том, что ни один из некоммутирующих операторов не действует на собственное значение другого. К сожалению, это условие в ([11]) не сформулировано, но оно при доказательстве теоремы предполагается. Видимо, это обусловлено тем, что ранее с таким случаем не имели дела.

Естественно возникает вопрос—не противоречит ли изложенная выше теория каким-то общим принципам физики?

Выше мы увидели, что в отношении вопроса «что является следствием изотропности пространства», к которому непосредственно относится эта теория, дело обстоит как раз наоборот. Противоречия, которые были как внутри традиционной теории, так и между традиционной теорией и экспериментом, устраняются в изложенной теории.

Оператор вращения $\hat{R}_{\vec{n}}=\exp[i\varphi(\vec{n}\hat{\vec{J}})/\hbar]$, связанный с оператором полного момента $\hat{\vec{J}}$, определяемым соотношением (10), является единственным, под воздействием которого волновые функции частиц (как свободных, так и в центрально-симметричном поле) со спинами $s=0$, 1/2, 1 и т. д. преобразуются как скаляр, спинор, вектор и т. д.

Внутренняя противоречивость традиционной теории с особой очевидностью явствует из факта, принимаемого также в этой теории, что скалярное произведение $(\vec{p}\vec{r})$ не должно изменяться при вращениях системы координат. Т. е., в частности, должно иметь место равенство

$$\hat{R}_z(\vec{p}\cdot\vec{r})=(\vec{p}\cdot\vec{r})\hat{R}_z, \tag{19}$$

где $\hat{R}_z$—оператор вращения вокруг оси z, связанный с оператором z-компоненты полного момента соотношением

$$\hat{R}_z=\exp[i\varphi J_z/\hbar]. \tag{20}$$

Учитывая, что

$$(\vec{p}\cdot\vec{r})=pr[\cos\vartheta_p\cos\vartheta_r+\sin\vartheta_p\sin\vartheta_r\cos(\varphi_p-\varphi_r)], \quad (21)$$

и подставляя в (20) выражение

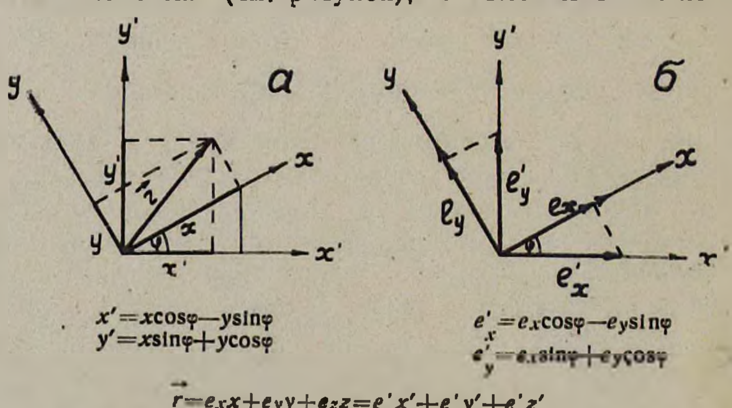
$$\hat{J}_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi_r}-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi_p}+\hat{s}_z, \quad (22)$$

видим, что (19) в изложенной теории удовлетворяется (из-за $\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_r}+\frac{\partial}{\partial\varphi_p}\right)(\varphi_p-\varphi_r)=0$), что не имеет места в традиционной теории, поскольку в этой теории в качестве оператора z-компоненты полного момента $\hat{J}_z$ мы должны подставить согласно (6) лишь часть выражения (22), равную

$$\hat{j}_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi_r}+s_z. \quad (23)$$

Доказанная необходимость участия в $\hat{J}_z$ члена $\partial/\partial\varphi_p$ наряду с $\partial/\partial\varphi_r$ не связана с введением фазового пространства. φ_p (и ϑ_p) определяет направление импульса не в импульсном пространстве, а в обычном координатном пространстве. Естественно, что при повороте системы координат в последнем направление импульса, которое фактически не изменилось, в новой системе координат будет характеризоваться новым углом φ_p'. Это учитывается введением оператора $\hat{L}_z^p=-i\hbar\partial/\partial\varphi_p$, который действует не на импульс, а на угол φ_p, определяющий его направление в системе координат, в обычном пространстве. В таком понимании нет никакого выхода за рамки квантовой механики.

Поскольку при повороте системы координат векторы $\vec{r}$, $\vec{p}$, и $\vec{s}$ остаются неизменными (см. рисунок), а изменяются их компоненты



Поворот вокруг оси z на угол $-\varphi$: *а*—связь новых x', y' и старых x, y координат; *б*—связь новых e'_x, e'_y и старых e_x, e_y ортов

и орты e_x, e_y, e_z, направленные по координатным осям, то разговор о том, не нарушается ли соотношение неопределенностей Гейзенберга при вращении на конечный угол, является беспредметным. В свободном состоянии, описываемом плоской волной, электрон имеет определенный импульс, а все его положения равновероятны ($|\psi|^2$ не зависит от $\vec{r}$), т. е. $\Delta\vec{p}=0$, $\Delta\vec{r}=\infty$ и соотношение неопределенностей Гейзенберга удовлетворяется.

Нет соотношений неопределенностей между J_z, $\vec{J}^2$ и $\vec{p}$ по причине, рассмотренной выше.

Автор благодарен коллегам по институту за полезные дискуссии.

Ереванский физический
институт

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ թղթակից անդամ Վ. Հ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Տարածության իզոտրոպության հետևանքի ստուգման շուրջը

Կուլոնյան դաշտում բացասական լրիվ էներգիաների դեպքում մասնիկի ալիքային ֆունկցիան հանդիսանում է ավանդական շարժման քանակի մոմենտի օպերատորի սեփական ֆունկցիա։ Այդ փաստը համարվում է կենտրոնական սիմետրիկ դաշտի իզոտրոպության հետևանք։ Եթե մասնիկի որոշակի մոմենտ ունենալը քվանտային մեխանիկայում կապվում է միայն դաշտի բնույթի հետ, ապա դրական լրիվ էներգիաների դեպքում ևս կուլոնյան դաշտում մասնիկի ալիքային ֆունկցիան պետք է հանդիսանա շարժման քանակի լրիվ մոմենտի սեփական ֆունկցիա։ Դա տեղի չունի մոմենտի օպերատորի ավանդական սահմանման դեպքում, բայց տեղի ունի հեղինակի նախորդ աշխատանքներում գտնված օպերատորի դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Зоммерфельд,* Строение атома и спектры, ГИТТЛ, М., 1956. [2] *К. Альдер, О. Бор, Т. Хус* и др., Rev. Mod Phys., vol. 28 (1956); Деформация атомных ядер, ИЛ, М., 1958. [3] *V. A. Djrbashian,* Nucl. Physics, vol. 65 (1965). [4] *В. А. Джрбашян,* Изв. АН АрмССР, т. 16, №2 (1963). [5] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц,* Квантовая механика, ГИФМЛ, М., 1963. [6] *В. А. Джрбашян,* Изв. АН Арм ССР. Физика, т. 16, №1 (1981). [7] *В. А. Джрбашян,* Препринт ЕФИ—449 (1980). [8] *В. А. Джрбашян,* ДАН АрмССР, т. 80, №3 (1985). [9] *А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий,* Квантовая электродинамика, Наука, М., 1969. [10] *В. А. Джрбашян,* Изв. АН АрмССР. Физика, т. 20, №4 (1985). [11] *Д. И. Блохинцев,* Основы квантовой механики, Наука, М., 1976.