ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXI 1985 5

МАТЕМАТИКА

УДК 519.45:539.3

В. М. Фомин

Интегральное представление функции, заданной на множестве с пространственной группой симметрии

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 31/V 1984)

Решение задач статики и динамики линейных упругих систем допускает существенные упрощения при наличии симметрии у таких систем ([1-3]). Основополагающим является тот факт, что приложенная нагрузка может быть представлена в виде линейной комбинации составляющих, преобразующихся по неприводимым представлениям группы симметрии. Аппарат подобного разложения, разработанный в ([4]) для систем с пространственной группой симметрии, относится к важному специальному случаю исходной функции, так называемому случаю усеченной симметрии. Для систем, инвариантных относительно группы трансляций, соответствующий алгоритм был предложен в работе ([5]).

В настоящей статье излагается алгоритм разложения, пригодный для групп симметрии и функций более общего вида.

1°. Рассмотрим множество П точек трехмерного вещественного линейного пространства R_3, инвариантное относительно пространственной группы G. Будем называть основным параллелепипед, построенный на основных векторах $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ подгруппы G_T трансляций группы G, а элементарным симплексом—замыкание наименьшей по включению односвязной части этого параллелепипеда, действуя на которую преобразованиями из максимальной точечной подгруппы $H\subset G$, можно покрыть весь параллелепипед. Выберем один из элементарных симплексов в качестве основного и присвоим основному параллелепипеду символ S_{000}, а основному элементарному симплексу символ S_{0001}. Система элементарных симплексов $S_{m_1m_2m_3n}=t_{m_1m_2m_3}h_nS_{0001}(m_1, m_2, m_3=0, \pm 1, \pm 2, \ldots; h_n\in H, n=1, 2, \ldots N)$ образует покрытие множества П. Через $t_{m_1m_2m_3}$ обозначена трансляция на вектор $m_1\vec{a}_1+m_2\vec{a}_2+m_3\vec{a}_3$. Предполагается, что h_1—тождественное преобразование и что порядок группы H равен N. Заметим попутно, что все рассуждения, проведенные для трехмерного случая, легко переносятся на случай пространства R_n с любым n.

Введем функции $\Psi_n(x_{000j})$ $(j, n=1, 2, \ldots, N)$, определенные на основном параллелепипеде S_{000}, следующим образом:

$$\Psi_n(x_{000j})=\delta_{jn} \ (j, n=1, 2, \ldots, N; \ x_{000j}\in S_{000j}).$$

Разложим каждую из этих функций на составляющие, преобразующиеся по неэквивалентным неприводимым представлениям точечной группы некоторого вектора $\vec{k}\in\Omega$ (Ω—зона Бриллюэна [6])

$$\Psi_n(x_{000j}) = \sum_{\mu=1}^{M} \sum_{\nu=1}^{l_\mu} \Psi_{n\mu\nu}(x_{000j}, \vec{k}) \quad (j, n = 1, 2, \ldots, N),$$

где

$$\Psi_{n\mu\nu}(x_{000j}, \vec{k}) = \frac{l_\mu}{N_{\vec{k}}} \sum_{h\in H_{\vec{k}}} \tau_{\nu\nu}^{(\mu)}(h^{-1}) h\Psi_n(x_{000j}).$$

В этих формулах M—число неэквивалентных неприводимых представлений группы $H_{\vec{k}}$, l_μ—размерность μ-го неприводимого представления, этой группы, $\tau_{\nu\nu}^{(\mu)}$—элемент матрицы этого представления, $N_{\vec{k}}$—порядок группы $H_{\vec{k}}$.

Из теории представлений пространственных групп следует, что функции

$$\Phi_{n\mu\nu j}(x_{m_1m_2m_3p}, \vec{k}) = \Psi_{g(j)n,\mu,\nu}(x_{000p}, g(j)\vec{k})\exp[-ig(j)\vec{k}\cdot\vec{a}_{m_1m_2m_3}]$$

$$(\nu=1, 2, \ldots, l_\mu;\ j=1, 2, \ldots, L;\ x_{m_1m_2m_3p}=t_{m_1m_2m_3}x_{000p};\tag{1}$$

$$\vec{a}_{m_1m_2m_3} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3$$

при фиксированных n, $\vec{k}$ и μ преобразуются по неприводимому представлению группы G. В формуле (1) через $g(j)$ ($j = 1, 2, \ldots, L$) обозначены элементы группы H, участвующие в разложении ее на левые смежные классы по подгруппе $H_{\vec{k}}$. Заметим, что любая функция, заданная на основном параллелепипеде, может быть представлена в следующем виде:

$$F(x_{000j}) = \sum_{n=1}^{N} F(x_{000n})\Psi_n(x_{000j}) \quad (j = 1, 2, \ldots, N),$$

а, следовательно,

$$F(x_{000j}) = \sum_{n=1}^{N} F(x_{000n}) \sum_{\mu=1}^{M} \sum_{\nu=1}^{l_\mu} \Psi_{n\mu\nu}(x_{000j}, \vec{k}) \quad (j = 1, 2, \ldots, N).\tag{2}$$

2°. Рассмотрим множество ограниченных функций, определенных на множестве П. Ряд

$$F(x_{000n}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty} f(x_{m_1m_2m_3n})\exp[i(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3)]\tag{3}$$

$$(x_{m_1m_2m_3n} = t_{m_1m_2m_3}x_{000n},\ x_{000n}\in S_{000n})$$

сходится в S' к периодической обобщенной функции с 3-периодом $(2\pi, 2\pi, 2\pi)$ [6]. Ее можно рассматривать как обобщенную функцию на кубе $\Gamma\{-\pi\leqslant\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\leqslant\pi\}$ с отождествленными противоположными гранями. В качестве основных принимаются здесь бесконечно-дифференцируемые функции на Γ. Тогда

$$f(x_{m_1m_2m_3n}) = \frac{1}{(2\pi)^3}(F, \exp[-i(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3)]).\tag{4}$$

Заметим, что (4) может быть записано так:

$$f_{(m_1m_2m_3n)}=\frac{1}{V}(F,\ \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{a}_{m_1m_2m_3})). \qquad (5)$$

Здесь функция F рассматривается как обобщенная на зоне Бриллюена Ω. Приняты следующие обозначения: $\vec{a}_{m_1m_2m_3}=m_1\vec{a}_1+m_2\vec{a}_2+m_3\vec{a}_3$, $\vec{k}=\frac{1}{2\pi}(\alpha_1\vec{b}_1+\alpha_2\vec{b}_2+\alpha_3\vec{b}_3)$ ($\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$—основные векторы обратной решетки, $\vec{a}_m\cdot\vec{b}_n=\delta_{mn}$; $m, n=1, 2, 3$), V—объем зоны Бриллюена.

Обозначим через Δ множество ограниченных функций на П, для которых соответствующее дискретное преобразование Фурье (3) имеет следующий вид:

$$F(x_0,\vec{k})=F_0(x_0,\vec{k})+\sum_{p=1}^{p_1}F_1(x_0,\vec{k}_p)\delta(\vec{k}-\vec{k}_p)+\sum_{p=1}^{p_2}F_2(x_0,\vec{k})\delta\Gamma_p \qquad (6)$$

$$(x_0=x_{000n},\ n=1, 2, \ldots, N).$$

Здесь $F_0(x_0,\vec{k})$—кусочно-непрерывная функция, определенная всюду в Ω, за исключением конечного числа точек, кусочно-гладких поверхностей и линий, интеграл от которой по области $\Omega-U_\varepsilon$ (U_ε—ε—окрестность вышеуказанных точек, поверхностей и линий стремится к конечному пределу при $\varepsilon\to0$; $F_2(x_0,\vec{k})$—кусочно-непрерывная функция, заданная на кусочно-гладких поверхностях и линиях Γ_p ($p=1, 2, \ldots, p_2$); $\delta(\vec{k})$—дельта-функция, $\delta\Gamma_p$—обобщенная функция на Ω, действующая по правилу

$$(F(x_0,\vec{k})\delta\Gamma_p,\ \varphi)=\int\limits_{\Gamma_p}F(x_0,\vec{k})\varphi(\vec{k})d\Gamma_p.$$

Подставив (6) в (5), получим

$$f(x)=f_0(x)+f_1(x)+f_2(x), \qquad (7)$$

где

$$f_0(x)=\frac{1}{V}\int\limits_{\Omega}F_0(x_0,\vec{k})\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{a}_{m_1m_2m_3})d\Omega_{\vec{k}}, \qquad (8)$$

$$f_1(x)=\frac{1}{V}\sum_{p=1}^{p_1}F_1(x_0,\vec{k}_p)\exp(-i\vec{k}_p\cdot\vec{a}_{m_1m_2m_3}),$$

$$f_2(x)=\frac{1}{V}\int\limits_{\Gamma_p}F_2(x_0,\vec{k})\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{a}_{m_1m_2m_3})d\Gamma_p$$

$$(x_0=x_{000n},\ x=x_{m_1m_2m_3n},\ n=1, 2, \ldots, N).$$

Заметим, что (8) может быть записано так:

$$f_0(x)=\frac{1}{V}\sum_{p=1}^{N}\int\limits_{\Omega_p}F_0(x_0,\vec{k})\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{a}_{m_1m_2m_3})d\Omega_{\vec{k}}.$$

Здесь через Ω_1 обозначен основной элементарный симплекс зоны

Бриллюена. Остальные элементарные симплексы могут быть получе-
ны так:

$$\Omega_p = h_p\Omega_1 \quad (h_p \in H). \qquad (9$$

Поэтому

$$f_0(x) = \frac{1}{V}\sum_{p=1}^{N}\int\limits_{\Omega_1} F_0(x_0, h_p\vec{k})\exp(-ih_p\vec{k}\cdot\vec{a}_{m_1m_2m_3})d\Omega_{\vec{k}}.$$

Воспользовавшись разложением (2) и учитывая (1), будем иметь

$$f_0(x) = \frac{1}{V}\sum_{p,n=1}^{N}\int\limits_{\Omega_1} F_0(x_0, h_p\vec{k})\Phi_{n11}(x, \vec{k})d\Omega_{\vec{k}}, \qquad (10$$

$$f_1(x) = \frac{1}{V}\sum_{p=1}^{P^1}\sum_{n=1}^{N} F_1(x_0, \vec{k}_p)\sum_{\mu=1}^{M_p}\sum_{\nu=1}^{l_{\mu p}}\Phi_{n\mu\nu}(x, \vec{k}_p), \qquad (11$$

$$f_2(x) = \frac{1}{V}\sum_{p=1}^{P_2}\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{\Gamma_p} F_2(x_0, \vec{k})\sum_{\mu=1}^{M}\sum_{\nu=1}^{l_\mu}\Phi_{n\mu\nu}(x, \vec{k})d\Gamma_p \qquad (12$$

$(x = x_{m_1m_2m_3j},\ x_0 = x_{000n};\ n, j = 1, 2, \ldots, N;\ m_1, m_2, m_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Здесь $l_{\mu p}$ — размерность μ-го неприводимого представления точечно
группы вектора $\vec{k}_p$, M_p — число неэквивалентных неприводимых пре
ставлений этой группы. При выводе (10) учтено, что функция $F_0(x,$
$\vec{k})$ суммируема в Ω и множество векторов с нетривиальными точеч
ными группами имеет меру нуль.

Таким образом, справедлива

Теорема. *Произвольная функция из Δ имеет дискретно-конти
нуальное разложение* (7), (10)—(12) *по функциям* (1), *преобразую
щимся по неприводимым представлениям группы G.*

Замечание. Пусть множество точек $\vec{k}_p$ в формуле (6) инва
риантно относительно преобразований $h \in H$. Разбивая суммировани
по p в формуле (11) на ряд суммирований по точкам $\vec{k}_p$, располо
женным в пределах одного элементарного симплекса $\Omega_j (j = 1, 2, \ldots,$
и учитывая (9), будем иметь

$$f_1(x) = \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}_p \in \Omega_1}\sum_{\mu=1}^{M_p}\sum_{\nu=1}^{l_{\mu p}}\sum_{q=1}^{L_p}\sum_{n=1}^{N} F_1(x_{0,0,0,g(q)n}, g(q)\vec{k}_p)\Phi_{n\mu\nu q}(x, \vec{k}_p).$$

Здесь L_p — число левых смежных классов в разложении группы п
точечной группе вектора $\vec{k}_p$.

Одесский инженерно-строительный
институт

Վ. Մ. ՖՈՄԻՆ

Սիմետրիայի տարածական խմբով բազմության վրա տրված ֆունկցիայի ինտեգրալ ներկայացումը

Սիմետրիկ առաձգական համակարգերի ստատիկայի և դինամիկայի խնդիրների լուծումներն էական պարզեցումներ են թույլ տալիս։ Հիմնականն է հանդիսանում այն փաստը, որ կիրառված բեռնվածքը, որպես սիմետրիկ բազմության վրա տրված ֆունկցիա, կարելի է ներկայացնել ըստ բազմության սիմետրիայի խմբի չբերվող ներկայացումների ձևափոխվող բաղադրիչների գծային կոմբինացիայի տեսքով։

Սիմետրիայի տարածական խմբով բազմության վրա տրված սահմանափակ ֆունկցիայի համար առաջարկված է Ֆուրյեի դիսկրետ ձևափոխության վրա հիմնված ալգորիթմ, որը թույլ է տալիս ֆունկցիան ներկայացնել ըստ սիմետրիայի խմբի չբերվող ներկայացումների ձևափոխվող ֆունկցիաների դիսկրետ-կոնտինուալ վերլուծությամբ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. М. Фомин*, в сб.: Распределенное управление процессами в сплошных средах, вып. 6, 1969. [2] *В. М. Фомин*, в сб.: Сложные системы управления, 1976. [3] *М. Л. Бурышкин*, ПММ, т. 39, вып. 3 (1975). [4] *М. Л. Бурышкин*, ДАН УССР, Сер. А, № 7 (1975). [5] *Б. М. Нуллер, М. Б. Рывкин*, Изв. ВНИИГ им. *Б. Е. Веденеева*, т. 136 (1980). [6] *В. С. Владимиров*, Обобщенные функции в математической физике, Наука, М., 1979. [7] *И. Г. Каплан*, Симметрия многоэлектронных систем, Наука, М., 1969. [8] *Г. Я. Любарский*, Теория групп и ее применение в физике, Физматгиз, М., 1958.