ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXI 1985 5

УДК 517.518.235

МАТЕМАТИКА

В. С. Захарян, Д. Т. Багдасарян

О росте функций с конечным интегралом типа Дирихле

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 7/VI 1984)

Пусть $U=\{|z|<1\}$ единичный круг. Для аналитических в U функций $f(z)=\sum\limits_0^\infty a_n z^n$ обозначим

$$\overline{M}(r, f)=\sum_{n=0}^\infty |a_n| r^n; \quad M(r, f)=\max_{|z|=r}|f(z)| \quad (0<r<1).$$

Обозначим через Ω^0 класс функций $\varphi(t)$, для которых $\varphi(t)\uparrow+\infty$ при $t\to 0$ и $\int\limits_0 \varphi(x)dx<+\infty$, а через Ω_0 класс функций $h(t)\geqslant 0$, которые монотонно стремятся к нулю при $t\downarrow 0$, и для них существует производная функция $h'(t)=H(t)$, для которой

$$\lim_{t\to 0}\frac{h(t)}{tH(t)}=C \quad (\neq 0, \infty) \tag{1}$$

и $H(x)\uparrow+\infty$ при $x\downarrow 0$.

Ясно, что если $h(t)\in\Omega_0$, то $h'(x)=H(x)\in\Omega^0$.

Далее обозначим через D_h класс функций f, аналитических в U, таких, что при $h(x)\in\Omega_0$

$$S_h(f)=\iint\limits_U h(1-r)|f'(re^{i\varphi})|^2 r\,dr\,d\varphi<+\infty. \tag{2}$$

Ясно, что если $h(t)\in\Omega^0$, то $D_h\subset D_1$, а если $h(t)\in\Omega_0$, то $D_h\supset D_1$, где D_1 класс функций $D_h: h(t)=\text{const}$.

Приведем несколько вспомогательных результатов

Лемма 1. *Если* $\omega(x)\in\Omega^0$ *и*

$$\Phi_{\alpha,\beta}(n)=\int_0^1 \omega(1-x)x^{\alpha n+\beta}dx,$$

где $n\geqslant 1$ *целое,* $1\leqslant\alpha<+\infty$, $-1\leqslant\beta<+\infty$, *то*

$$\Phi_{\alpha,\beta}(n)=O\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\omega(x)\,dx\right).$$

Доказательство можно найти в работе ([1])

Лемма 2. *Пусть* $h(x)\in\Omega_0$, $0\leqslant p\leqslant 1$ и

$$G_p(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\left[h\left(\frac{1}{n}\right)\right]^p}. \tag{3}$$

Тогда при $\rho\to 1$ имеет место оценка

$$G_p(\rho)=0\left(\frac{1}{(1-\rho)[h(1-\rho)]^p}\right). \tag{4}$$

Доказательство. В силу (3) можно предполагать, что неравенство $0<C_1\leqslant\dfrac{nh\left(\frac{1}{n}\right)}{H\left(\frac{1}{n}\right)}\leqslant C_2<+\infty$ имеет место начиная с $n=1$, что не влияет на последующие рассуждения.

Имеем $G_p(\rho)\leqslant\sum\limits_{n<\frac{1}{1-\rho}}\dfrac{\rho^n}{\left[h\left(\frac{1}{n}\right)\right]^p}+C\sum\limits_{n>\frac{1}{1-\rho}}\dfrac{n^p\rho^n}{\left[H\left(\frac{1}{n}\right)\right]^p}=\Sigma_1+\Sigma_2,$

но легко усмотреть, что $\Sigma_1\leqslant\dfrac{1}{[h(1-\rho)]^p}\sum\limits_{n<\frac{1}{1-\rho}}\rho^n<\dfrac{1}{(1-\rho)[h(1-\rho)]^p}$,

$$\Sigma_2\leqslant\frac{C_2}{[H(1-\rho)]^p}\sum_{n>\frac{1}{1-\rho}}n^p\rho^n<\frac{C_2}{[H(1-\rho)]^p}\sum_1^{\infty}n^p\rho^n\sim$$

$$\sim\frac{C_2}{(1-\rho)^{1+p}[H(1-\rho)]^p}\leqslant\frac{C}{(1-\rho)[h(1-\rho)]^p}.$$

С другой стороны

$$G_p(\rho)\geqslant\sum_{n>\frac{1}{1-\rho}}\frac{\rho^n}{\left[h\left(\frac{1}{n}\right)\right]^p}\geqslant\frac{1}{[h(1-\rho)]^p}\sum_{N+1}^{\infty}\rho^n=\frac{\rho^{N+1}}{(1-\rho)[h(1-\rho)]^p},$$

где N удовлетворяет условию $N\leqslant\dfrac{1}{1-\rho}$, $N+1>\dfrac{1}{1-\rho}$.

Отсюда для ρ^{N+1} получаем следующее неравенство: $\rho^{N+1}>\rho^{\frac{1}{1-\rho}+1}$, и, так как $\lim\limits_{\rho\to 1}\rho^{\frac{2-\rho}{1-\rho}}=e^{-1}$, то при ρ, достаточно близких к 1, имеем $\rho^N>\dfrac{1}{2e}$.

Следствие. Обозначим $Q_p(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^{1-p}\left[H\left(\frac{1}{n}\right)\right]^p}$.

При $\rho\to 1-0$ имеет место

$$Q_p(\rho)=0\left(\int_0^{\rho}\frac{dt}{(1-t)[h(1-t)]^p}\right); \tag{5}$$

в частном случае при $p=1$ получается

$$Q_1(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{H\left(\frac{1}{n}\right)}=0\left(\int_0^{\rho}\frac{dt}{(1-t)h(1-t)}\right). \tag{6}$$

Пусть $f(z)=\sum a_n z^n$ аналитична в U и $h(x)\in\Omega_0$. Тогда

$$S_h(f)=\sum|a_n|^2n^2\int_0^1 h(1-\rho)\rho^{2n-1}d\rho=\sum|a_n|^2\frac{n}{2}\int_0^1 H(1-\rho)\rho^{2n}d\rho.$$

Так как $H(1-\rho)\in\Omega^2$, то согласно лемме 1

$$\int_0^1 H(1-\rho)\rho^{2n}d\rho=0\left(h\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

и следовательно

$$S_h(f)=C\sum|a_n|^2 nh\left(\frac{1}{n}\right). \tag{7}$$

Теорема 1°. *Пусть $f(z)\in D_h$, $h(x)\in\Omega_0$. Тогда*

$$\lim_{r\to 1}\overline{M}(r,f)[Q_1(r^2)]^{-\frac{1}{2}}=0, \tag{8}$$

где

$$Q_1(r)=0\left(\int_0^{\rho}\frac{dt}{(1-t)h(1-t)}\right).$$

Доказательство. Напишем $\overline{M}(r,f)$ в следующем виде:

$$\overline{M}(r,f)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n=\sum_{n=0}^{K}|a_n|r^n+\sum_{n=K+1}^{\infty}\left[nh\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{2}}|a_n|\left[nh\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}r^n.$$

Применяя теперь неравенство Шварца, получим

$$\overline{M}(r,f)\leqslant\sum_{n=0}^{K}|a_n|\cdot r^n+\left(\sum_{n=K+1}^{\infty}|a_n|^2nh\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\sum_{n=K+1}^{\infty}\left[nh\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{-1}r^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=0}^{K}|a_n|\cdot r^n+\left(\sum_{n=K+1}^{\infty}|a_n|^2nh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}}[Q_1(r^2)]^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Откуда следует

$$\limsup_{r\to 1-0}M(r,f)[Q_1(r^2)]^{-\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{n=K+1}^{\infty}|a_n|^2nh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как левая сторона неравенства не зависит от K, то отсюда вытекает доказательство теоремы.

Докажем теперь, что в теореме 1 величина $\frac{1}{2}$ наилучшее возможное значение.

Теорема 2. *Для любой константы p, удовлетворяющей условию $0<p<\frac{1}{2}$, в U существует функция $\varphi\in D_h$* при $h\in\Omega_0$, *такая, что*

$$\liminf_{r\to 1} M(r, \varphi)[Q_1(r^2)]^{-p} \geqslant 1. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(z) = Q_p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{1-p}\left[H\left(\frac{1}{n}\right)\right]^p}$.

Сперва докажем, что $Q_p(z) \in D_n$. Из (1) имеем, что при x, достаточно близких к нулю, $\frac{C_1}{x} < \frac{h'(x)}{h(x)}$; интегрируя по x в интервале (x, x_0), где x_0 фиксировано, а x достаточно близко к 0, получим $h(x) < Mx^{C_1}$; отсюда, так как $h'(x) = H(x) \uparrow +\infty$ при $x \downarrow 0$, получаем $h(x) = H(\bar{x})x < Mx^{C_1}$, $0 < \bar{x} < x$.

Следовательно $H(x)x < H(\bar{x})x < Mx^{C_1}$; $H(x) < \frac{M}{x^{1-C_1}}$, где C_1, M—некоторые постоянные, и в силу того, что $H(x) \uparrow +\infty$ при $x \downarrow 0$, $0 < C_1 < 1$.

Имеем

$$S_h(\varphi) = C\sum_{1}^{\infty}\left[H\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{1-2p}\frac{1}{n^{2-2p}} < C_2\sum_{1}^{\infty}\frac{n^{(1-2p)(1-C_1)}}{n^{2-2p}} < +\infty.$$

Теперь докажем, что имеет место (10).

Из равенства (5) имеем

$$M(r, Q_p) = \sum\frac{r^n}{n^{1-p}\left[H\left(\frac{1}{n}\right)\right]^p} = 0\left(\int_0^r\frac{dt}{(1-t)[H(1-t)]^p}\right).$$

Следовательно

$$\lim_{r\to 1} M(r, \varphi)[Q_1(r^2)]^p \geqslant C\lim_{r\to 1}\int_0^r\frac{dt}{(1-t)[h(1-t)]^p}\cdot\left(\int_0^r\frac{dt}{(1-t)h(1-t)}\right)^{-p} =$$

$$= \frac{C}{p}\lim_{r\to 1}\left\{h(1-r)\int_0^r\frac{dt}{(1-t)h(1-t)}\right\}^{1-p} \geqslant \frac{C}{p}\lim_{r\to 1}\left\{\frac{h(1-r)}{C_1(1-r)H(1-r)}\right\}^{1-p} =$$

$$= A(\neq 0, \infty),$$

отсюда и следует (10).

Замечание. Оценки (8) и (10) при $h(t) = \text{const}$ совпадают с результатами Коулинга ([2]) и Ямасита ([3]), а при $h(t) = t^{\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$—с соответствующим результатом ([4]).

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ, Դ. Թ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Դիրիխլեյի տիպի վերջավոր ինտեգրալով ֆունկցիաների աճի մասին

Թող $U=\{|z|<1\}$-ը լինի միավոր շրջանը։ U-ում անալիտիկ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ֆունկցիայի համար նշանակենք $\overline{M}(r, f) = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$: D_n-ով նշանակենք U-ում անալիտիկ այն ֆունկցիաների դասը, որոնց համար $S_h(f) = \iint_U h(1-r)|f'(re^{i\varphi})|^2 r\,dr\,d\varphi < +\infty$, որտեղ $h(t)$-ն բավարարում է որոշակի պայմանների։ Հոդվածում D_h-դասի ֆունկցիաների համար ստացված է հետևյալ գնահատականը՝ $\lim \overline{M}(r, f)[Q_1(r)]^{-\frac{1}{2}} = 0$, որտեղ $Q_1(r) = O\left(\int_0^r \frac{dt}{(1-t)h(1-t)}\right)$։ Ապացուցված է, որ այդ գնահատականում $\frac{1}{2}$ մեծությունը լավագույն հնարավոր արժեքն է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян*, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 34, с 1262—1339 (1970). [2] *V. Cowling*, Amer. math. monthly, v. 66, 119—120 (1959). [3] *S. Yamashita*, Amer. math. monthly, v. 87, № 7 (1980). [4] *В. С. Захарян*, ДАН АрмССР, т. 79, № 2 (1984).