ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXI 1985 4

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Л. М. Варданян, М. Г. Степанян, Р. Г. Тадевосян

Плоская задача для клиновидных областей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 21/II 1985)

1°. Приводится решение плоской задачи теории упругости для бесконечного усеченного клина (рисунок), когда одна полубесконечная сторона жестко защемлена ($U_2=V_2=0$), на другой заданы внешние нагрузки ($\sigma_\varphi^{(1)}=f_1$, $\tau_{r\varphi}^{(1)}=g_1$), а на конечной части границы тела задается одно из следующих условий: 1) напряжения—($\sigma_\varphi=f$, $\tau_{r\varphi}=g$); 2) симметрии ($\tau_{r\varphi}=0$, $V_\varphi=0$); 3) кососимметрии ($\sigma_\varphi=0$, $U_r=0$).

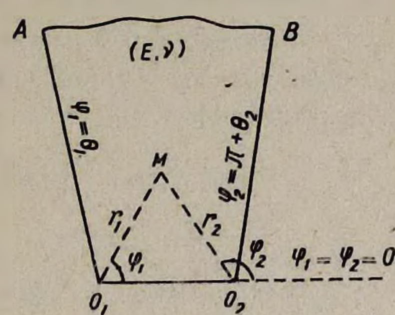

Рис. 1.

Аналогичные задачи рассматривались в работах ([1–7]). Следуя этим работам, решение бигармонического уравнения представим в виде суммы интегралов Меллина

$$F=\sum_{n=1}^{2}F_n(r_n,\bar{\varphi}_n)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{2}\int_{L_n}\Phi_n(s,\bar{\varphi})r_n^{1-s}ds;$$

$$\Phi_n(s,\bar{\varphi}_n)=A_n(s)\cos(s-1)\bar{\varphi}_n+B_n\sin(s-1)\bar{\varphi}_n+C_n\cos(s+1)\bar{\varphi}_n+$$
$$+D_n\sin(s+1)\bar{\varphi}_n, \tag{1.1}$$

$$\bar{\varphi}_1=\varphi,\ \bar{\varphi}_2=\varphi_2-\pi,\ 0<\varphi_1\leqslant\Theta_1,\ \Theta_2\leqslant\varphi_2-\pi<0,\ \Theta_1-\Theta_2\geqslant\pi.$$

Рассмотрим задачу 1. Представляя функции f и g в виде

$$f=f^{(1)}+f^{(2)},\quad g=g^{(1)}+g^{(2)} \tag{1.2}$$

и требуя, чтобы условия на отрезке O_1O_2 удовлетворялись в виде

$$\sigma_\varphi^{(n)}=f^{(n)},\ \tau_{r\varphi}^{(n)}=g^{(n)}\quad(n=1,2), \tag{1.3}$$

получим соотношения

$$\xi(\xi-1)(A_n+C_n)=a^\xi\tilde{f}^{(n)}(\xi),\ \xi[(\xi-1)B_n+(\xi+1)D_n]=a^\xi\tilde{g}^{(n)}(\xi), \tag{1.4}$$

где функции $\tilde{f}^{(n)}(\xi)$ и $\tilde{g}^{(n)}(\xi)$ имеют вид

$$\tilde{f}^{(n)}(\xi)=a^{-\xi}\int_0^a f^{(n)}(r_n)r_n^\xi dr_n,\quad \tilde{g}^{(n)}(\xi)=a^{-\xi}\int_0^a g^{(n)}(r_n)r_n^\xi dr_n. \tag{1.5}$$

Удовлетворив теперь остальным граничным условиям, после ряда преобразований получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений ($n+p=3$, $n=1,2$):

$$X_n(s)+\int\limits_{L_p}[K_p^{(1)}(s,\xi)X_p(\xi)+K_p^{(2)}(s,\xi)Y_p(\xi)]d\xi=F_n(s);$$

$$Y_n(s)+\int\limits_{L_p}[K_p^{(3)}(s,\xi)X_p(\xi)+K_p^{(4)}(s,\xi)Y_p(\xi)]d\xi=G_n(s); \quad (1.6)$$

$$K_p^{(j)}(s,\xi)=\frac{B(s+1,\xi-s)}{2\pi i\Delta_p(\xi)}k_p^{(j)}(s,\xi) \quad (j=1\div4), \quad (1.7)$$

где $B(s+1,\xi-s)$—эйлерова „бетта-функция", $k_p^{(j)}(s,\xi)$—регулярные функции, имеющие вид:

$$k_1^{(1)}(s,\xi)=\alpha_1^-(\xi,\Theta_1)\bar{\alpha}_2^+(s,\varepsilon_2)+\beta_1^+(\xi,\Theta_1)\bar{\beta}_2^-(s,\varepsilon_2);$$

$$k_1^{(2)}=-\beta_1^-\bar{\alpha}_1^++\alpha_1^+\bar{\beta}_1^-,\ k_1^{(3)}=\alpha_1^-\bar{\beta}_2^+-\beta_1^+\bar{\alpha}_2^-,\ k_1^{(4)}=-\beta_1^-\bar{\beta}_2^+-\alpha_1^+\bar{\alpha}_2^-;$$

$$k_2^{(1)}(s,\xi)=\bar{\alpha}_2^-(\xi,\Theta_2)\alpha_1^+(s,\varepsilon_1)+\bar{\beta}_2^+(\xi,\Theta_2)\beta_1^-(s,\varepsilon_1);$$

$$k_2^{(2)}=\bar{\beta}_2^-\alpha_1^+-\bar{\alpha}_2^+\beta_1^-,\ k_2^{(3)}=-\bar{\alpha}_2^-\beta_1^++\bar{\beta}_2^+\alpha_1^-,\ k_2^{(4)}=-\bar{\beta}_1^-\beta_1^+-\bar{\alpha}_2^+\alpha_1^-. \quad (1.8)$$

Свободные члены системы (1.6) выражаются через внешние нагрузки следующим образом:

$$F_n(s)=\tilde{f}_n(s)-\int\limits_{L_n}[\tilde{f}^{(p)}(\xi)F_p^{(1)}(s,\xi)+\tilde{g}^{(p)}(\xi)F_p^{(2)}(s,\xi)]d\xi;$$

$$G_n(s)=\tilde{g}_n(s)-\int\limits_{L_n}[\tilde{f}^{(p)}(\xi)F_p^{(3)}(s,\xi)+\tilde{g}^{(p)}(\xi)F_p^{(4)}(s,\xi)]d\xi. \quad (1.9)$$

Здесь $\tilde{f}_n$, $\tilde{g}_n$ преобразования Меллина функций f_n, g_n,

$$F_p^{(j)}(s,\xi)=\frac{B(s+1,\xi-s)}{2\pi i\Delta_p(\xi)}f_p^{(j)}(s,\xi) \quad (j=1\div4); \quad (1.10)$$

$$f_1^{(1)}(s,\xi)=s_2^-(\xi,\Theta_2)\alpha_1^+(s,\varepsilon_1)-c_2^+(\xi,\Theta_2)\beta_1^-(s,\varepsilon_1);$$

$$f_1^{(2)}=c_2^-\alpha_1^++s_2^+\beta_1^-;\ f_1^{(3)}=-s_2^-\beta_1^+-c_2^+\alpha_1^-;\ f_1^{(4)}=-c_2^-\beta_1^++s_2^+\alpha_1^-;$$

$$f_2^{(1)}(s,\xi)=s_1^-(\xi,\Theta_1)\bar{\alpha}_2^+(s,\varepsilon_2)+c_1^+(\xi,\Theta_1)\bar{\beta}_2^-(s,\varepsilon_2);$$

$$f_2^{(2)}=c_1^-\bar{\alpha}_2^++s_1^+\bar{\beta}_2^-;\ f_2^{(3)}=-s_1^-\bar{\beta}_2^++c_1^+\bar{\alpha}_2^-;\ f_2^{(4)}=-c_1^-\bar{\beta}_2^++s_1^+\bar{\alpha}_2^-, \quad (1.11)$$

где $\varepsilon_n=(-1)^n\beta_n$, $|\Theta_n|+\beta_n=\pi$, $0\leq|\beta_n|<\pi$.

Неизвестные функции $A_n(s)$, $B_n(s)$, $C_n(s)$, $D_n(s)$ определяются через новые неизвестные $X_n(s)$ и $Y_n(s)$ формулами

$$C_1(\xi)\xi\Delta_1(\xi,\Theta_1)=a^\xi[X_1(\xi)\alpha_1^-(\xi,\Theta_1)-Y_1\beta_1^-+\tilde{f}^{(1)}s_1^-+\tilde{g}^{(1)}c_1^-];$$

$$D_1(\xi)\xi\Delta_1(\xi,\Theta_1)=a^\xi[X_1(\xi)\beta_1^+(\xi,\Theta_1)+Y_1\alpha_1^++\tilde{f}^{(1)}c_1^++\tilde{g}^{(1)}s_1^+];$$

$$C_2(\xi)\xi\Delta_2(\xi,\Theta_2)=a^\xi[X_2(\xi)\bar{\alpha}_2^-(\xi,\Theta_2)+Y_2\bar{\beta}_2^-+\tilde{f}^{(2)}s_2^-+\tilde{g}^{(2)}c_2^-];$$

$$D_2(\xi)\xi\Delta_2(\xi,\Theta_2)=a^\xi[-X_2(\xi)\bar{\beta}_2^+(\xi,\Theta_2)+Y_2\alpha_2^++\tilde{f}^{(2)}c_2^++\tilde{g}^{(2)}s_2^+]. \quad (1.12)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Delta_1(\xi, \Theta_1)=4(\sin^2\xi\Theta_1-\xi^2\sin^2\Theta_1);$$

$$\Delta_2(\xi, \Theta_2)=4\{(1+\nu)[\nu\sin^2\xi\Theta_2-\xi^2(1+\nu)\sin^2\Theta_2]+4\}; \tag{1.13}$$

$$s_1^{\pm}(\xi, \Theta_1)=-2(\sin^2\xi\Theta_1\mp\xi\sin^2\Theta_1), \quad c_1^{\pm}(\xi, \Theta_1)=\mp(\sin 2\xi\Theta_1\pm\xi\sin 2\Theta_1);$$

$$s_2^{\pm}(\xi, \Theta_2)=\pm(1+\nu)[(1+\nu)(\sin 2\xi\Theta_2\pm\xi\sin 2\Theta_2)\mp 4\sin 2\xi\Theta_2];$$

$$c_2^{\pm}(\xi, \Theta_2)=\pm 2(1+\nu)[(1+\nu)(\sin^2\xi\Theta_2\mp\xi\sin^2\Theta_2)+2\cos 2\xi\Theta_2];$$

$$\alpha_n^{\pm}(\xi, \Theta_n)=\alpha_n^{\pm}+\delta_0\cos(\xi+1)\Theta_n, \quad \beta_n^{\pm}(\xi, \Theta_n)=\beta_n^{\pm}-\delta_0\sin(\xi+1)\Theta_n;$$

$$\alpha_n^{\pm}(\xi, \Theta_n)=(1\mp\xi)[\cos(\xi-1)\Theta_n-\cos(\xi+1)\Theta_n], \quad \delta_0=4/1+\nu;$$

$$\beta_n^{\pm}(\xi, \Theta_n)=(1\pm\xi)\sin(\xi+1)\Theta_n+(1\mp\xi)\sin(\xi-1)\Theta_n \quad (n=1, 2). \tag{1.14}$$

В работах ([1,2,5]) показано, что система сингулярных интегральных уравнений (1.6) путем исключения некоторых неизвестных сводится к двум независимым системам регулярных интегральных уравнений Фредгольма второго рода, содержащих каждое по два уравнения. Если же неизвестные функции представить в виде ряда по полиномам Чебышева—Эрмита

$$X_n(s)=\Gamma(1+s)\sum_{q=0}^{\infty} x_n^{(q)}\widetilde{H}_q(s), \quad Y_n(s)=\Gamma(1+s)\sum_{q=0}^{\infty} Y_n^{(q)}\widetilde{H}_q(s), \tag{1.15}$$

где $\Gamma(x)$ — „гамма функция", а

$$\widetilde{H}_q(s)=\frac{\overline{H}_q(s)}{\sqrt{2^n n!}\sqrt{\pi}}, \quad \overline{H}_q(s)=i^q H_q\left(\frac{s-c}{i}\right), \quad s=c+iy, \tag{1.16}$$

$H_q(s)$ — многочлены Чебышева—Эрмита, то интегральные уравнения (1.6) сводятся к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений

$$x_n^{(l)}+\sum_{q=0}^{\infty}[A_{n1}^{(q,l)}x_p^{(q)}+A_{n2}^{(q,l)}y^{(q)}]=F_{n,l} \quad (n+p=3;\ n=1, 2;\ l=0, 1, 2\ \ldots);$$

$$y_n^{(l)}+\sum_{q=0}^{\infty}[A_{p3}^{(q,l)}x_p^{(q)}+A_{p4}^{(q,l)}y_p^{(q)}]=G_{n,l}; \tag{1.17}$$

$$A_{nl}^{(q,l)}=(-1)^{l+1}\int\limits_{L_n}\int\limits_{L_p}\widetilde{H}_l(s)\widetilde{H}_q(\xi)\exp(s-c)^2\Gamma(\xi-s)k_p^{(j)}(s, \xi)\ \frac{ds\,d\xi}{2\pi\Delta_p(\xi)};$$

$$F_{n,l}=(-1)^{l+1}i\int\limits_{L_n}F_n(s)\widetilde{H}_l(s)\Gamma^{-1}(1+s)\exp(s-c)^2 ds;$$

$$G_{n,l}=(-1)^{l+1}i\int\limits_{L_n}G_n(s)\widetilde{H}_l(s)\Gamma^{-1}(1+s)\exp(s-c)^2 ds. \tag{1.18}$$

Вопросы разрешимости системы (1.17) исследованы в работах ([1,2,5]).

2^0. Если в рассматриваемой задаче на конечной части границы тела удовлетворяются условия симметрии (задача 2) или кососимметрии (задача 3), то опять приходим к решению интегральных уравнений

(1.6) с ядрами (1.7), где регулярные функции имеют теперь вид

$$k_n^{\{4\}}(s,\xi)=M_n^{\pm}(s,\xi),\quad k_n^{\{3\}}=N_n^{\pm},\quad k_n^{\{3\}}=P_n^{\pm},\quad k_n^{\{1\}}=Q_n^{\pm},\tag{2.1}$$

а неизвестные функции A_n, B_n, C_n, D_n определяются через новые неизвестные X_n и Y_n формулами

$$(1+\nu)^{p-1}\begin{Bmatrix}A_n(\xi)\\B_n(\xi)\end{Bmatrix}\xi\Delta_n(\xi)=a^{\xi}\left\{\left[\frac{\xi+1}{\xi-1}-\frac{2+(-1)^n2}{(\xi-1)(1+\nu)}\right]X_n(\xi)\begin{Bmatrix}\sin(\xi+1)\Theta_n\\\cos(\xi+1)\Theta_n\end{Bmatrix}\pm\right.$$

$$\left.\pm(-1)^p\left[1+\frac{2+(-1)^n2}{(\xi-1)(1+\nu)}\right]Y_n(\xi)\begin{Bmatrix}\cos(\xi+1)\Theta_n\\\sin(\xi+1)\Theta_n\end{Bmatrix}\right\};$$

$$(1+\nu)^{p-1}\begin{Bmatrix}C_n(\xi)\\D_n(\xi)\end{Bmatrix}\xi\Delta_n(\xi)=-a^{\xi}\left[X_n(\xi)\begin{Bmatrix}\sin(\xi-1)\Theta_n\\\cos(\xi-1)\Theta_n\end{Bmatrix}\pm\right.$$

$$\left.\pm(-1)^pY_n(\xi)\begin{Bmatrix}\cos(\xi-1)\Theta_n\\\sin(\xi-1)\Theta_n\end{Bmatrix}\right];\tag{2.2}$$

$$\Delta_1=\sin2\xi\Theta_1\pm\xi\sin2\Theta_1,\quad \Delta_2=(\nu-3)\sin2\Theta_2\pm(1+\nu)\xi\sin2\Theta_2.\tag{2.3}$$

В выражениях (2.1)$\div$(2.3) верхние индексы и строки относятся к задаче 2, нижние— 3.

$$M_n^{\pm}=\delta^{\pm}[\beta_n^{\pm}(\xi,\Theta_n)\cos(s-1)\varepsilon_p-\alpha_p^{\pm}(s,\varepsilon_p)\sin(\xi-1)\Theta_n-\delta_0\cos s_p\sin\xi_n];$$

$$N_n^{\pm}=\pm\delta^{\mp}[\alpha_n^{\pm}\cos(s-1)\varepsilon_p-\alpha_p^{\pm}\cos(\xi-1)\Theta_n-\delta^{\pm}\delta_0\cos s_p\cos\xi_n];$$

$$P_n^{\pm}=-\delta^{\pm}[\beta_n^{\pm}\sin(s-1)\varepsilon_p-\beta_p^{\pm}\sin(\xi-1)\Theta_n+(-1)^n\delta_0\sin s_p\sin\xi_n];$$

$$Q_n^{\pm}=\pm[\alpha_n^{\pm}\sin(s-1)\varepsilon_p+(-1)^p\beta_p^{\pm}\cos(\xi-1)\Theta_n+(-1)^n\delta_0\sin s_p\cos\xi_n],$$

$$S_p=[s+(-1)^p]\varepsilon_p,\quad \xi_n=[\xi+(-1)^n]\Theta_n,\quad \delta^{\pm}=\begin{Bmatrix}1\\(-1)^p\end{Bmatrix}\quad(n+p=3).\tag{2.4}$$

Кроме того, в случае симметрии $B_n=0$, $D_n=0$, а в случае кососимметрии $A_n=0$, $C_n=0$.

Свободные члены интегральных уравнений (1.6) для этих случаев выражаются только первыми слагаемыми формул (1.9), где надо положить $\tilde{f}_2(s)=\tilde{g}_2(s)=0$.

Переходим к вычислению напряжений. Для простоты приводим выражение нормального напряжения σ_φ точек отрезка $O_1O_2(\Gamma_1+\Gamma_2=a)$ для задачи 2:

$$\sigma_\varphi=\frac{1}{2\pi i}\sum_{p=1}^{2}\int_{L_p}s(s-1)[A_p(s)+C_p(s)]r_p^{-s-1}ds.\tag{2.5}$$

Подставляя сюда выражения A_p, C_p из (2.2) и принимая, что корни Δ_m простые, после применения теории вычетов формулу (2.5) представим в виде

$$\sigma_\varphi=\sum_{m=1}^{2}\left[\sum_{(\mathrm{Re}\,\xi_{mn}<0)}d_n^{(m)}\left(\frac{a}{r_m}\right)^{\xi_{mn}+1}\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(m)}\left(\frac{a}{r_m}\right)^{-n+1}\right].\tag{2.6}$$

Здесь

$$d_n^{(1)}=\frac{\Gamma(1+\xi_{1n})}{(1+\nu)\Delta_1'(\xi_{1n})}[\tilde{x}(\xi_{1n})\beta_1^{+}(\xi_{1n},\Theta_1)+\tilde{y}(\xi_{1n})\alpha_1^{+}(\xi_{1n},\Theta_1)];$$

$$d_n^{(2)} = \frac{\Gamma(1+\xi_{2n})}{\Delta_2(\xi_{2n})}\left[\tilde{x}_2(\xi_{2n})\bar{\beta}_2^{+}(\xi_{2n}, \Theta_2) - \tilde{y}_2(\xi_{2n})\bar{\alpha}_2^{+}(\xi_{2n}, \Theta_2)\right];$$

$$c_n^{(1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+\nu)} \cdot \frac{n}{(n-1)!\Delta_1(-n)}\left[\tilde{x}_1(-n)\beta_1^{+}(-n, \Theta_1) + \tilde{y}_1(-n)\alpha_1^{+}(-n, \Theta_1)\right];$$

$$c_n^{(2)} = (-1)^{n+1}\frac{n}{(n-1)!\Delta_2(-n)}\left[\tilde{x}_2(-n)\bar{\beta}_2^{+}(-n, \Theta_2) - \tilde{y}_2(-n)\bar{\alpha}_2^{+}(-n, \Theta_2)\right];$$

$$\tilde{x}_n(s) = X_n(s)/\Gamma(1+s), \quad \tilde{y}_n(s) = Y_n(s)/\Gamma(1+s), \tag{2.7}$$

где ξ_{mn} — корни целой функции Δ_m, для которых ($\operatorname{Re}\xi_{mn} < 0$). Наличие вторых слагаемых в (2.6) обусловлено тем, что неизвестные функции X_n и Y_n имеют простые полюсы в точках $\xi = -n$ ($n = 1, 2 \ldots$). При этом коэффициенты $c_n^{(m)}$ можно вычислить как по формулам (2.7), так и через линейные комбинации $d_n^{(m)}$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Լ. Մ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ, Մ. Գ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ, Ռ. Գ. ԹԱԴԵՎՈՍՅԱՆ

Հարթ խնդիրը սեպաձև տիրույթների համար

Հոդվածում բերվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումը անվերջ, հատած սեպի համար, երբ եզրային ճառագայթներից մեկը ամրակցված է, մյուսի վրա ազդում է կամայական արտաքին բեռ, իսկ վերջավոր հատվածի վրա տրված հետևյալ երեք պայմաններից մեկը՝ 1. $\sigma_\varphi = f$, $\tau_{r\varphi} = g$; 2. $\tau_{r\varphi} = 0$, $V_\varphi = 0$; 3. $\sigma_\varphi = 0$, $U_r = 0$: *Խնդիրը բերվում է Ֆրեդհոլմի ռեգուլյար հավասարումների կամ ռեգուլյար անվերջ սիստեմների լուծմանը: Բերվում են լարումների համար բանաձևեր՝ անջատված եզակիություններով:*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Баблоян*, ДАН АрмССР, т. 65. № 5 (1977). [2] *Л. А. Баблоян, Н. О. Гулканян*, ДАН АрмССР, т. 62, № 3 (1976). [3] *В. Т. Гринченко*, Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров, Наукова думка, Киев, 1978. [4] *Б. М. Нуллер*, ПММ, т. 36, вып. 1 (1972). [5] *Р. Г. Тадевосян*, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 36, № 6 (1983). [6] *А. Ф. Улитко*, Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости, Наукова думка, Киев, 1979. [7] *Я. С. Уфлянд*. Интегральные преобразования в задачах теории упругости, Наука, Л., 1967.