

УДК 517.534

МАТЕМАТИКА

А. А. Гольдберг, А. Э. Еременко

Об обобщенных множествах единственности для целых функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 19/III 1984)

Множество $E \subset \mathbb{C}$ называется обобщенным множеством единственности (о. м. е.), если для любых целых функций f и g из $f(E) = g(E)$ вытекает, что $f = g$. Это понятие ввели Г. Даймонд, К. Померанце и Л. Рубел ⁽¹⁾ (о. м. е. — неточный перевод их термина „set of range uniqueness“). В ⁽¹⁾ получен ряд условий, достаточных для того, чтобы счетное множество с единственной предельной точкой в $z=0$ было или не было о. м. е. Э. Томас ⁽²⁾ решил ряд проблем, поставленных в ⁽¹⁾, построив пример области и пример кривой, которые являются о. м. е. Здесь указаны некоторые классы областей и кривых, не являющихся о. м. е. В частности, будет решена одна проблема из ⁽¹⁾. В конце приведен пример бесконечно гладкой жордановой кривой, являющейся о. м. е.

Очевидно, что справедлива

Лемма. Если E — о. м. е., а f — целая функция, $\neq \text{const}$, то $f(E)$ — о. м. е.

Следствие 1. Пусть $E \subset \mathbb{C}$, L — целая линейная функция. Множества E и $L(E)$ являются или не являются о. м. е. одновременно

Теорема 1. Пусть $E \subset \mathbb{C}$ — множество, содержащее неограниченную последовательность внутренних точек. Тогда E не является о. м. е.

Из условий теоремы следует существование кругов $K_n = \{z : |z - z_n| \leq r_n\}$, $K_n \subset E$, $|z_n| + r_n < |z_{n+1}| - r_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. Соединим точку $a_n \in K_n$, $|a_n| = |z_n| + r_n$, с точкой $b_{n+1} \in K_{n+1}$, $|b_{n+1}| = |z_{n+1}| - r_{n+1}$, жордановой кривой $l_n \subset \{z : |a_n| \leq |z| \leq |b_{n+1}|\}$. Обозначим через K замкнутое связное множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{K_n \cup l_n\}$. На K зададим функцию f следующим образом: $f(z) = (n+1)(z - z_n)/r_n$ при $z \in K_n$, $n = 1, 2, \dots$, f непрерывна на K . Тогда f непрерывна на K и аналитична на множестве внутренних точек K . Очевидно, что K удовлетворяет условию известной теоремы М. В. Келдыша (⁽³⁾, с. 69, теорема 1.3), в силу которой существует целая функция G такая, что $|f(z) - G(z)| < 1$ при $z \in K$. По теореме Руше $G(K_n) \supset \{w : |w| < n-1\}$. Поэтому $G(K) = \mathbb{C}$ и $G(E) = \mathbb{C}$. Так как $-G(E) = \mathbb{C}$, то E не является о. м. е.

Незначительная модификация одного из примеров Э. Томаса ⁽²⁾ показывает, что существует жорданова кривая, уходящая к ∞ , являющаяся о. м. е. С этим фактом контрастирует

Следствие 2. Каждая неограниченная область не является о. м. е.

Джонстон ⁽⁴⁾ показал, что любая треугольная область не является о. м. е. Это дает ответ на один из вопросов проблемы 3 в ⁽¹⁾. Для полного решения проблемы 3 необходима еще следующая теорема.

Теорема 2. Любой треугольный контур не является о. м. е.

В силу следствия 1, не уменьшая общности, можем считать, что вершины треугольника расположены в точках $A=a+ih$, $B=-\pi-ih$, $C=\pi-ih$, где $h>0$, $-\infty<a<\infty$. Будем различать два случая: 1) для всех целых k выполняется $a \neq 2k\pi$; 2) для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ имеем $a=2k\pi$. Положим $L(z)=-z-(\pi-a)$. Тогда в первом случае $\sin L(z) = -\sin((\pi-a)+z) = \sin z$. Но, как нетрудно проверить, $\sin L(\Delta ABC) = \sin(\Delta ABC)$. Действительно, $L(A)=B$, $L(B)=A$, $L([AB])=[AB]$. Поэтому $\sin L([AB]) = \sin([AB])$. Далее $L(C)=A-2\pi$, $L(A)=C-2\pi$, $L([AC])=[AC]-2\pi$. Поэтому $\sin L([AC]) = \sin([AC])$. Наконец, нетрудно убедиться, что и $\sin L([BC])$, и $\sin([BC])$ являются эллипсами с вершинами в точках $\pm ish$, $\pm ch$. Во втором случае $\sin 2L(z) = -\sin(2(\pi-a)+2z) = -\sin 2z$. Рассуждая, как в первом случае, нетрудно убедиться, что $\sin 2L(\Delta ABC) = \sin 2(\Delta ABC)$.

Пусть путь Γ может быть задан параметризацией $z=z(t)$, $a \leq t \leq b$, где $z(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, $z'(t) \neq 0$ на $[a, b]$. Тогда путь называется бесконечно гладким, а $C=z([a, b])$ называется бесконечно гладкой кривой (или носителем пути, или следом пути). Если требовать, чтобы $z(t)$ была аналитической функцией на $[a, b]$, $z'(t) \neq 0$, то путь и кривая называются правильными аналитическими.

В ⁽²⁾ кривая, являющаяся о. м. е., имеет всюду плотное множество угловых точек. В ⁽⁴⁾ показано, что о. м. е. может быть и гладкая кривая. Ниже строится пример бесконечно гладкой кривой с тем же свойством.

Теорема 3. Существует бесконечно гладкая жорданова или замкнутая жорданова кривая, являющаяся о. м. е.

Обозначим $x_n = 1/n!$. Определим на $[x_{2n}, x_{2n-1}]$ функцию $\psi_n(t) = \eta_n \exp\{(t-x_{2n})(t-x_{2n-1})\}^{-1}$, где $\eta_n > 0$ выбрано столь малым, что на $[x_{2n}, x_{2n-1}]$ выполняется $|\psi_n(t)| < 1/n$, $|\psi'_n(t)| < 1/n$, ..., $|\psi_n^{(n)}(t)| < 1/n$.

Определим $\psi(t) = \psi_n(t)$ при $x_{2n} \leq t \leq x_{2n-1}$, $\psi(t) = 0$ при $t \in [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} [x_{2n}, x_{2n-1}]$. Нетрудно убедиться, что ψ — бесконечно дифференцируемая функция на $[0, 1]$, $\psi(0) = \psi'(0) = \dots = 0$. Возьмем путь Γ , задаваемый отображением $z = t + i\psi(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Покажем, что соответствующая бесконечно гладкая жорданова кривая C является о. м. е. Пусть f — целая функция, $K = f(C)$. Можно показать, что K является кусочно-жордановой кривой. Легко видеть, что последовательность $|f(x_j) - f(0)|$ строго монотонно убывает при $j \geq N$, N — достаточно большое число. Следовательно, точки $f(x_j)$ попарно различны при $j \geq N$. Назовем точку $w_0 \in K$ особой, если при любом $\delta > 0$ множество $K \cap \{w : |w - w_0| < \delta\}$ нельзя покрыть конечным числом правильных аналитических кривых. Множество W особых точек отличается от множества $\{f(x_j) : j \geq N\}$ самое большее на конечное множество. Занумеруем

точки множества $\{w_j\} = W \setminus \{f(0)\}$ так, чтобы выполнялось $|w_j - f(0)| \geq |w_j - f(0)| \geq \dots$. Легко видеть, что $f(x_j) = w_j + k_1$ для всех $j \geq j_0 \geq N$ и некоторого $k_1 \in Z$.

Пусть теперь g — другая целая функция. Повторяя то же рассуждение, получим, что $g(x_j) = w_j + k_2$ для всех достаточно больших j и некоторого $k_2 \in Z$. Отсюда следует, что $f(0) = g(0)$ и $f(x_j) = g(x_{j+k})$ при всех достаточно больших j и некоторого фиксированного целого k . Пусть $f(z) - f(0) = (1 + o(1))az^p$, $z \rightarrow 0$, $a \neq 0$, $p \in N$;

$$g(z) - g(0) = (1 + o(1))bz^q, \quad z \rightarrow 0, \quad b \neq 0, \quad q \in N.$$

Тогда из $f(x_j) = g(x_{j+k})$ следует

$$a\{(j+k)!\}^p = (1 + o(1))b\{j!\}^q, \quad j \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Прологарифмировав (1) и заметив, что $\ln((j+k)!) \sim \ln(j!)$, $j \rightarrow \infty$, получим, что $p = q$. Тогда (1) возможно лишь при $k = 0$. Из $f(x_j) = g(x_j)$ по классической теореме единственности получаем, что $f = g$, следовательно, C есть о. м. е. Кривая C_1 — образ C при отображении $z \mapsto \exp 2\pi iz$ есть замкнутая бесконечно гладкая жорданова кривая. Она является о. м. е. в силу леммы.

Львовский государственный университет.

Физико-технический институт низких температур Академии наук
Украинской ССР

Ա. Ա. ԳՈՒԴԻՆԵՐԳ, Ա. Է. ՆՐՅՈՄՅԵՆԿՈ

Ամբողջ ֆունկցիաների միակության ընդհանրացված
բազմությունների մասին

Կոմպլեքս C հարթության մեջ ընկած E բազմությունը անվանվում է միակության ընդհանրացված բազմություն, եթե կամայական երկու f և g ֆունկցիաների համար $f(E) = g(E)$ հավասարությունից հետևում է, որ f ու g ֆունկցիաները նույնաբար համընկնում են:

Ներկա աշխատանքում կառուցվել են մի շարք բազմությունների օրինակներ, որոնք հանդիսանում են միակության ընդհանրացված բազմությունների: Կառուցվել են նաև բազմությունների օրինակներ, որոնք չեն հանդիսանում միակության ընդհանրացված բազմությունների: Մասնավորապես աշխատանքում ապացուցվում է, որ կամայական եռանկյուն կոնտուրը չի հանդիսանում միակության ընդհանրացված բազմություն: Դրանով տրվում է Կ. Դամյոնդի, Կ. Պոմիրանցի և Լ. Ռուբելի ⁽¹⁾ մի հարցի պատասխանը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ H. G. Diamond, C. Pomerance, L. Rubel, Math. Z., Bd. 176, № 3 (1981). ² E. Thomas, Illinois J. Math., v. 27, № 1 (1983). ³ С. Н. Мергелян, УМН, т. 7, № 2 (1952). ⁴ E. H. Johnston, Math. Z., Bd. 184 (1983).

