ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXI 1985 4

УДК 518.9

МАТЕМАТИКА

К. В. Сагателян

Позиционные игры с переменной информацией

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 14/III 1984)

Математическая модель позиционной игры, определенная впервые Дж. фон Нейманом ([1]), уточненная и расширенная впоследствии Г. Куном ([2]), Р. Ауманом ([3]) и другими авторами, содержит информационную структуру в качестве одного из основных компонентов игры. Однако во многих приложениях выбор той или иной информационной структуры может зависеть от игрока (лица, принимающего решение). Так, во многих экономических и военных задачах вопрос выбора той или иной системы разведки, связи или структуры и объема памяти управляющей ЭВМ приводит к рассмотрению различных информационных структур в рамках одной игры. В данной работе рассматриваются позиционные игры, в которых информационная структура является составной частью не игры, а стратегии игрока.

Определение. Позиционной игрой с переменной информацией называется система

$$G=\langle I, N, \{X_i\}_{i\in N}, \{\sigma_i\}_{i\in I}, \{H^i\}_{i\in I}\rangle,$$

где $I=\{1, 2, \ldots, m\}$—множество игроков; $N=\{1, 2, \ldots, n\}$—множество ходов в игре; X_i, $i=\overline{1, n}$—множество альтернатив на i-том шаге; $\sigma_1\cup\sigma_2\cup\ldots\cup\sigma_m=N$, $\sigma_i\cap\sigma_j=\varnothing$, $i\neq j$—разбиение множества ходов на множества личных ходов игроков в игре; $H^i:\prod\limits_{i\in N} X_i\to R^1$—функция выигрыша i-того игрока.

Множества X_i, $i=\overline{1, n}$ предполагаются конечными или счетными с дискретной измеримой структурой либо изоморфными единичному отрезку с σ-алгеброй борелевских множеств. Отображение H^i, $i=\overline{1, n}$ предполагается измеримым отображением.

Определение. *Информационной структурой игрока $i\in I$ назовем пару $w^i=\langle U^i, g^i\rangle$, где*

$$U^i=\{U^i_j\}_{j\in\sigma_i},\ g^i=\{g^i_j\}_{j\in\sigma_i},$$

$$g^i_j:\prod_{k<j} X_k\to U^i_j,\ i\in I,\ j\in N.$$

Измеримые пространства U^i_j, $i\in I$, $j\in N$ удовлетворяют тем же ограничениям, что и пространства альтернатив X_i, $i=\overline{1, n}$, а отображения g^i_j, $i\in I$, $j\in N$ предполагаются измеримыми отображениями.

Определение. *Стратегией игрока i в игре G называется пара $c^i=\langle w^i, s^i\rangle$, где $w^i=\langle U^i, g^i\rangle$—информационная структура*

игрока i, а $s^i=\{s^i_j\}_{j\in\sigma_i}$—конечный набор измеримых случайных функций

$$s^i_j:\Omega\times U^i_j\to X_j,\ j\in\sigma_i,\ i\in N.$$

Здесь (Ω, A, P)—фиксированное пространство выборок.

Для каждой ситуации $c=(c^1, \ldots, c^m)$, $c^i=(U^i, g^i, s^i)$, определим векторную случайную величину $v^j_c(\omega)=(v^1_c, v^2_c, \ldots, v^n_c)$, где

$$v^j_c(\omega)=s^i_j(\omega, g^i_j(v^1_c, \ldots, v^{j-1}_c)),\ \text{если}\ j\in\sigma_i,\ i\in I.$$

Каждая ситуация c в игре G индуцирует вероятностную меру μ_c на произведении измеримых пространств $X=\prod\limits_{j\in N} X_j$ следующим образом: $\mu_c=Pv_c^{-1}$.

Выигрыш игрока i в ситуации c определяется как обычно: $H^i(c)=\int\limits_X H^i d\mu_c$.

По аналогии с моделью Р. Аумана ([1]) определим подыгру с фиксированной информационной структурой.

Определение. *Для данной игры $G=\langle I, N, \{x_j\}_{j\in N}, \{\sigma_i\}_{i\in I}, \{H^i\}_{i\in I}\rangle$ подыгрой G_w с фиксированной информационной структурой $w=(w^1, \ldots, w^m)$, $w^i=\langle U^i, g^i\rangle$ называется система $G_w=\langle I, N, \{X_j\}_{j\in N}, \{\sigma_i\}_{i\in I}, \{g^i\}_{i\in I}, \{U^i\}_{i\in I}, \{H^i\}_{i\in s}\rangle$.*

Стратегия игрока i в подыгре G_w определяется так же, как и в ([3]), а именно: стратегией называется конечный набор измеримых случайных функций $s^i=\{s^i_j\}_{j\in\sigma_i}$, $s^i_j:\Omega\times U^i_j\to X_j$, $j\in\sigma_i$.

Введем следующие обозначения. Обозначим через W^i множество всех информационных структур игрока i в игре G. Для каждого $w^i=\langle U^i, g^i\rangle$ обозначим через $S^i_{w^i}$ множество всех случайных функций, заданных на информационной структуре w^i, т. е. $S^i_{w^i}=\{s^i : s^i=\{s^i_j\}_{j\in\sigma_i}\}$, где $s^i_j:\Omega\times U^i_j\to X_j$, $j\in\sigma_i$.

Положим, далее, для $w=(w^1, w^2, \ldots, w^m)$ $Sw=\prod\limits_{i\in I} S^i_{w^i}=\prod\limits_{w\in W} Sw$, $W=\prod\limits_{i\in I} W^i$.

Определение. *Для данной игры G и для каждой фиксированной $s\in S$ информационной подыгрой G_s называется бескоалиционная игра в нормальной форме: $G_s=\langle I, \{W^i\}_{i\in I}, \{h_i\}_{i\in I}\rangle$, где функция выигрыша $h_i(w)$ определяется следующим образом: $h_i(w)=H_i(c)$, где $c=\langle w, s_w\rangle$, $s_w\in S_w$, $s_w\subset s$.*

Пусть $S^0_w\subset S_w$—множество всех ситуаций равновесия в игре G_w, $S^0=\prod\limits_{w\in W} S^0_w$.

Теорема 1. *Для того, чтобы ситуация $\bar c=(\bar c^1, \ldots, \bar c^m)$, $\bar c^i=\langle\bar w^i, \bar s^i\rangle$ была ситуацией равновесия в игре G, необходимо и достаточно, чтобы $\bar s=(\bar s^1, \ldots, s^m)$ была ситуацией равновесия в игре $G_{\bar w}$, а $\bar w$—ситуацией равновесия в игре G_s, для которой $s\in S^0$, $s\supset\bar s$.*

Далее будут рассматриваться только антагонистические позиционные игры, т. е. такие игры G, для которых $I=\{1, 2\}$, $H^1=-H^2$.

Для данной антагонистической игры G обозначим через $v(w^1, w^2)$ значение подыгры G_{w^1, w^2}. Далее будет предполагаться, что значения подыгр G_{w^1, w^2} существуют при всех $w^1\in W^1$, $w^2\in W^2$.

Теорема 2. *Для того чтобы стратегия* $\bar{c}^i = \langle \bar{w}^i, \bar{s}^i \rangle$ *была оптимальной стратегией игрока* i, $i=1, 2$, *в игре* G, *необходимо и достаточно, чтобы* $\bar{s}_i$ *была оптимальна в подыгре* $G_{\bar{w}^1, \bar{w}^2}$, *а* $\bar{w}^i$ — *оптимальна в игре* $\bar{G}$,

$$\bar{G} = \langle W^1, W^2, v(w^1, w^2) \rangle.$$

При этом значение игры $\bar{G}$ *равно значению игры* G.

Аналогично ([4]) введем понятие уточнения информационной структуры игрока.

Определение. *Информационную структуру* $\bar{\bar{w}}^i \in W^i$ *назовем уточнением информационной структуры* $\bar{w}^i \in W^i$, $i=1, 2$, *в игре* G, *если*

1) $\bar{\bar{U}}^i_j \subseteq \bar{U}^i_j$, $j=\overline{1, n}$;

2) для любых $(x'_1, \ldots, x'_{j-1})$, $(x''_1, \ldots, x''_{j-1})$, $j=\overline{1, n}$, из $\bar{\bar{g}}^i_j(x'_1, \ldots, x'_{j-1}) = \bar{\bar{g}}^i_j(x''_1, \ldots, x''_{j-1})$ следует, что $\bar{g}^i_j(x'_1, \ldots, x'_{j-1}) = \bar{g}^i_j(x''_1, \ldots, x''_{j-1})$.

Теорема 3. *Пусть* $\bar{\bar{w}}^i$ *является уточнением* $\bar{w}^i$, $i=1, 2$. *Тогда для любых* $w^1 \in W^1$, $w^2 \in W^2$

$$v(\bar{\bar{w}}^1, w^2) \geqslant v(\bar{w}^1, w^2),$$

$$v(w^1, \bar{\bar{w}}^2) \leqslant v(w^1, \bar{w}^2).$$

Теорема 4. *Пусть* $\bar{\bar{w}}^i$ *является уточнением* $\bar{w}^i$; $i=1, 2$, $w^1 \in W^1$ *и* $w^2 \in W^2$ — *произвольные информационные структуры. Тогда, если у первого игрока существует чистая оптимальная стратегия в подыгре* $G_{\bar{w}^1, w^2}$, *то у него существует чистая оптимальная стратегия и в подыгре* $G_{\bar{\bar{w}}^1, w^2}$ *и*

$$v(\bar{w}^1, w^2) = v(\bar{\bar{w}}^1, w^2).$$

Если у второго игрока существует чистая оптимальная стратегия в подыгре $G_{w^1, \bar{w}^2}$, *то у него существует чистая оптимальная стратегия и в подыгре* $G_{w^1, \bar{\bar{w}}^2}$ *и*

$$v(w^1, \bar{w}^2) = v(w^1, \bar{\bar{w}}^2).$$

Как отмечалось выше, выбор той или иной информационной структуры в игре означает выбор системы связи или разведки в реальных задачах. Однако этот выбор в реальных условиях связан с определенными затратами. Чем совершеннее система связи или разведки, тем больше затраты на ее создание и обслуживание. Поэтому естественно ввести в модель игры плату за информацию. Пусть $\alpha_i(w^i)$ — плата за выбор информационной структуры $w^i \in W^i$, $i=1, 2$.

Если ввести в модель антагонистической игры функцию платы за информацию, игра перестанет быть антагонистической. Однако это обстоятельство не влияет на стратегические особенности игры. Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Для того чтобы стратегия* $\langle \bar{w}^i, \bar{s}^i \rangle$ *игрока* i, $i=1, 2$, *была оптимальна в игре* G, *необходимо и достаточно,*

чтобы $\bar{s}^1$ *была оптимальна в подыгре* $G_{\bar{w}^1, \bar{w}^2}$, *а* $\bar{w}^1$ *— оптимальна в антагонистической игре*

$$\bar{G} = \langle W^1, W^2, v(w^1, w^2) - \alpha_1(w^1) + \alpha_2(w^2) \rangle.$$

С точки зрения приложений особый интерес представляет случай, когда функция платы одного из игроков неизвестна. В этих случаях можно предполагать, что она равна нулю.

Теорема 6. *В играх*

$$G^1 = \langle W^1, W^2, v(w^1, w^2) - \alpha_1(w^1) \rangle,$$

$$G^2 = \langle W^1, W^2, v(w^1, w^2) + \alpha_2(w^2) \rangle$$

всегда существует ситуация равновесия в чистых стратегиях.

Ереванский государственный университет

Կ. Վ. ՍԱՂԱԹԵԼՅԱՆ

Փոփոխական ինֆորմացիայով դիրքային խաղեր

Դիտարկվում են դիրքային խաղեր, որոնց ինֆորմացիոն կառուցվածքը խաղացողի ստրատեգիայի բաղադրիչն է։ Ապացուցվում է, որ այդպիսի խաղերի լուծումը բերվում է ավելի պարզ կառուցվածքի խաղերի լուծումների։

Անտագոնիստական խաղերի դեպքում բերվում են խաղի լուծման մի քանի հատկություններ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Дж фон Нейман, О. Моргенштерн*, Теория игр и экономическое поведение, Наука, М., 1970. [2] *Г. У. Кун*, в кн.: Позиционные игры, Наука, М., 1967 [3] *Р. Дж. Аумман*, в кн.: Позиционные игры, Наука, М., 1967. [4] *Н. Дэлки*, в кн.: Позиционные игры, Наука, М., 1967.