УДК 517.444

МАТЕМАТИКА

С. С. Казарян

Интегральные неравенства для одной максимальной функции

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 11/III 1984)

Впервые весовые оценки изучались в работах Г. Харди и Д. Литтлвуда (1), К. И. Бабенко (2), И. Стейна (3) и др. Они рассматривали неравенства для классических операторов со степенными весами $\omega(x) = |x|^a$.

Полная характеристика весов, при которых справедливы интегральные неравенства для максимальной функции Харди—Литтлвуда, получена в 1972 г. Б. Макенхауптом (4), доказавшим следующий результат.

Теорема А. Пусть $\omega(x)$ вес в R^n и $1 < p < \infty$. Тогда следующие условия равносильны:

(а) $\omega(x) \in A_p$:

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq D$$

для произвольного куба $Q \subset R^n$.

(б) Для оператора $M(f, x)$ выполняется оценка сильного типа

$$\int_{R^n} |M(f, x)|^p \omega(x) dx \leq C_p \int_{R^n} |f(x)|^p \omega(x) dx,$$

$$\text{где } M(f, x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy, \quad x \in R^n.$$

Приведем определения и обозначения, которые необходимы для изложения дальнейших результатов.

Всюду ниже $\Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(\tau) d\tau$ функция Юнга ($\varphi(0) = 0$, $\varphi(\tau) > 0$

при $\tau > 0$, не убывает и непрерывна справа, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau) = +\infty$).

Мы предполагаем, что $\Phi(t)$ удовлетворяет Δ_2 условию $\Phi(2t) \leq C\Phi(t)$, которое эквивалентно более общему условию $\Phi(At) \leq D\Phi(t)$.

Предположим также, что дополнительная к $\Phi(t)$ функция $\Psi(t) =$

$$= \int_0^{|t|} \varphi^{-1}(\tau) d\tau, \text{ где } \varphi^{-1}(\tau) = \sup\{s : \varphi(s) \leq \tau\}, \text{ тоже удовлетворяет } \Delta_2 \text{ усло-$$

вию (см. (5), с. 22).

Весовое пространство Орлича L_{ω}^{Φ} , где $\omega(x) \geq 0$ локально интегрируемая функция в R^n , есть пространство таких функций $u(x)$, что $\left| \int_{R^n} u(x)v(x)\omega(x)dx \right| < \infty$ для любой $v(x)$ с $\int_{R^n} \Psi(v(x))\omega(x)dx < \infty$, L_{ω}^{Φ} — банахово пространство относительно нормы Орлича (для весовых функций все рассуждения аналогичны обычному случаю (см. (5), с. 83)).

$$\|f\|_{L_{\omega}^{\Phi}} = \sup_{\int_{R^n} \Psi(v(x))\omega(x)dx \leq 1} \left| \int_{R^n} f(x)v(x)\omega(x)dx \right|$$

Как и в обычном случае (см. (5), с. 97), эта норма эквивалентна следующей норме Люксембурга:

$$\|f\|_{L_{\omega}^{\Phi}} = \inf \left\{ \alpha : \int_{R^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\alpha}\right)\omega(x)dx = 1 \right\},$$

причем имеют место неравенства

$$\|f\|_{L_{\omega}(\Phi)} \leq \|f\|_{L_{\omega}^{\Phi}} \leq 2\|f\|_{L_{\omega}(\Phi)}.$$

Для произвольного куба $Q \subset R^n$ будем обозначать через $L_{\omega}^{\Phi}(Q)$ пространство таких функций $u(x)$, что $\left| \int_Q u(x)v(x)\omega(x)dx \right| < \infty$ для любой $v(x)$ с $\int_Q \Psi(v(x))\omega(x)dx < \infty$

Если $\omega=1$, то получаем обычное пространство Орлича.

Нам понадобится следующая функция: $S_{\Phi}(\lambda) = \inf_{t>0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}$.

Для нее справедливы соотношения (см. (6), с. 260)

$$p_0^* = \sup_{1 < \lambda < \infty} \frac{\ln S_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\ln S_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda};$$

$$p_1^* = \inf_{0 < \lambda < 1} \frac{\ln S_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln S_{\Phi}(\lambda)}{\ln \lambda}.$$

p_0^* и p_1^* называются нижним и верхним индексами функции $\Phi(t)$. Из работы (7) следует, что если q_0^* и q_1^* нижний и верхний индексы дополнительной к функции Юнга $\Phi(t)$ функции $\Psi(t)$, то $\frac{1}{p_0^*} + \frac{1}{q_1^*} = 1$ соответственно $\frac{1}{q_0^*} + \frac{1}{p_1^*} = 1$.

Р. Керман и А. Торчинский (8) распространили результаты Б. Макенхаупта на классы Орлича.

Теорема Б. Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и ее дополнительная функция $\Psi(t)$ удовлетворяют Δ_2 условию. Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) Имеет место неравенство

$$\int_{R^n} \Phi(M(f, x))\omega(x)dx \leq C_\Phi \int_{R^n} \Phi(f(x))\omega(x)dx,$$

где константа C_Φ не зависит от функции f .

(б) Локально интегрируемая, неотрицательная функция $\omega(x)$ принадлежит классу A_Φ :

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)dx\right)^\varphi \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(x)}\right)dx\right) \leq D_\Phi,$$

для всех кубов $Q \subset R^n$ и произвольных чисел $\varepsilon > 0$.

(в) $\omega(x)$ принадлежит классу $A_{p_0^*}$, где p_0^* нижний индекс функции Юнга $\Phi(t)$.

Для любой локально интегрируемой функции $\omega(x)$ введем связанную с ней максимальную функцию следующим образом:

$$H_\omega(f, x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} |\omega(x)| \int_Q \left| \frac{f(t)}{\omega(t)} \right| dt.$$

Легко увидеть, что непрерывность оператора $M(f, x)$ в весовом пространстве L_ω^p , $p \geq 1$ эквивалентна непрерывности оператора $H_\omega(f, x)$ в пространстве L^p , где $\omega(x) = |\omega(x)|^p$. Но в пространстве Орлича подобные результаты уже невозможно непосредственно вывести друг из друга. Отметим, что интегральные неравенства для $H_\omega(f, x)$ при некоторых условиях, налагаемых на функцию $\omega(x)$, рассматривались Ю. Чэнгом (8). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функция Юнга $\Phi(t)$ и дополнительная к ней функция $\Psi(t)$ удовлетворяют Δ_2 условию. Пусть p_0^* , p_1^* нижний и верхний индексы $\Phi(t)$ и соответственно q_0^* , q_1^* нижний и верхний индексы функции $\Psi(t)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(а) Локально интегрируемая функция $\omega(x)$ принадлежит классу B_Φ , т. е. для всех кубов $Q \subset R^n$ и произвольных чисел $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{|Q|} \|\chi_Q \omega\|_{L_\omega^{\Phi}} \left\| \frac{\chi_Q}{\omega} \right\|_{L_\omega^{\Psi}} \leq D_\Phi.$$

(б) $\omega(x)$ принадлежит классам $B_{p_0^*}$ и $B_{p_1^*}$, т. е. для всех кубов $Q \subset R^n$ справедливы соответственно неравенства

$$\frac{1}{|Q|} \|\chi_Q \omega\|_{L_{\omega}^{p_0^*}} \left\| \frac{\chi_Q}{\omega} \right\|_{L_{\omega}^{q_0^*}} \leq D_{p_0^*}, \quad \frac{1}{|Q|} \|\chi_Q \omega\|_{L_{\omega}^{p_1^*}} \left\| \frac{\chi_Q}{\omega} \right\|_{L_{\omega}^{q_1^*}} \leq D_{p_1^*}.$$

(в) Существует некоторая константа $C_\Phi > 0$ такая, что

$$\|H_\omega(f, x)\|_{L_\omega^{\Phi}} \leq C_\Phi \|f\|_{L_\omega^{\Psi}}.$$

(г) Существует некоторая константа $C'_\Phi > 0$ такая, что

$$\int_{R^n} \Phi(H_\omega(f, x))dx \leq C'_\Phi \int_{R^n} \Phi(f(x))dx.$$

(д) Существует некоторая константа $D_\Phi > 0$ такая, что для всех кубов $Q \subset R^n$ и произвольных чисел $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q S_\Phi(\varepsilon|\varpi(x)|) dx \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \Psi\left(\frac{1}{\varepsilon\varpi(x)}\right) dx \right) \leq D_\Phi.$$

(е) Выполняются неравенства

$$\|H_\varpi(f, x)\|_{L^{p_0^*}} \leq C_{p_0^*} \|f\|_{L^{p_0^*}}, \quad \|H_\varpi(f, x)\|_{L^{p_1^*}} \leq C_{p_1^*} \|f\|_{L^{p_1^*}}.$$

Легко видеть, что теорема 1 обобщает теорему А. Б. Макенхаупта.

Институт геофизики и
инженерной сейсмологии
Академии наук
Армянской ССР

Ս. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ինտեգրալ անհավասարություններ մի մախիմալ ֆունկցիայի համար

1972 թ. Բ. Մակենհաուպթի ⁽¹⁾ կողմից ստացվել էր այն կշիռների լրիվ բնութագիրը, որոնց դեպքում Հարդի-Լիթլվուդի մաքսիմալ ֆունկցիայի համար L^p ($1 < p < \infty$) տարածության նորմով տեղի ունեն ինտեգրալ անհավասարություններ:

Ի. Կերմանը և Ս. Տորչինսկին ⁽²⁾ տարածեցին Բ. Մակենհաուպթի արդյունքները Օրլիչի դասերի վրա:

Մեր կողմից կամայական լոկալ ինտեգրալի $\varpi(x)$ ֆունկցիայի համար սահմանվում է մաքսիմալ ֆունկցիա հետևյալ կերպ.

$$H_\varpi(f, x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} |\varpi(x)| \int_Q \left| \frac{f(t)}{\varpi(t)} \right| dt$$

և տրվում է $\varpi(x)$ -երի լրիվ բնութագիրը, որոնց դեպքում Օրլիչի դասերի վրա մասնավորաբար տեղի ունեն հետևյալ տիպի ինտեգրալ անհավասարություններ

$$\int_{R^n} \Phi(H_\varpi(f, x)) dx \leq C_\Phi \int_{R^n} \Phi(f(x)) dx:$$

ЛИТЕРАТУРА — ՉՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Acta Math., v. 54 (1930). ² К. И. Бабенко, ДАН СССР, т. 62, с. 157—160 (1948). ³ И. М. Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М. Мир, 1973. ⁴ B. Muckenhoupt, Trans Amer. Math. Soc., v. 155 (1972). ⁵ А. М. Красносельский, Я. Б. Рунцикий, Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, М., 1958. ⁶ E. Хилле, Р. Филипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962. ⁷ D. Boyd, Canad. J. Math., v. 21 (1969). ⁸ R. Kerman, A. Torchinsky, Studia Math., v. 71 (1982). ⁹ Y. Chen, Math. Ann., v. 140 (1960).