ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXI 1985 4

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

В. В. Сарафян

Марковские процессы и краевые задачи для одного класса систем

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 6/III 1984)

Рассмотрим дифференциальные операторы

$$L_k u(x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} a_k^{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^i \partial x^j}+\sum_{i=1}^{r} b_k^i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x^i},$$

$$x\in R^r;\ k=1,2;\ \sum_{i,j=1}^{r} a_k^{ij}(x)\lambda_i\lambda_j\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{r}\lambda_i^2>0.$$

Коэффициенты $a_k^{ij}(x)$, $b_k^i(x)$ предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми и ограниченными в R^r вместе со своими производными.

Пусть $c_{ij}(x)$, $x\in R^r$, $i, j\in\{1, 2\}$ ограниченные вместе с первыми и вторыми производными функциями; $c_{12}(x)\geqslant 0$, $c_{21}(x)\geqslant 0$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t}=L_1u_1(t,x)+c_{11}(x)u_1(t,x)+c_{12}(x)u_2(t,x);\\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t}=L_2u_2(t,x)+c_{21}(x)u_1(t,x)+c_{22}(x)u_2(t,x).\end{cases}\tag{1}$$

С системой (1) связано марковское семейство $Z_t^{x,i}=(X_t^{x,i}, \nu_t^{x,i})$ на фазовом пространстве $R^r\times\{1, 2\}$ и соответствующий марковский процесс $Z_t=(X_t, \nu_t, P_{x,i})$. Определение и свойства марковских семейств и процессов можно найти у Е. Б. Дынкина ([1]) или А. Д. Вентцеля ([2]).

Чтобы построить семейство $Z_t^{x,i}$ (по семейству процесс строится автоматически), рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{\tilde{\tau}_k\}$ на вероятностном пространстве (Ω^1, F^1, P^1), имеющих показательное распределение с параметром 1:

$$P^1\{\tilde{\tau}_k>t\}=e^{-t},\ k=1,2,\ldots.$$

Рассмотрим далее последовательность независимых марковских семейств $\{X_{1,n}^x(t)\}$, каждое из которых соответствует оператору L_1, и независимую от этой последовательности последовательность марковских семейств $X\{_{2,n}^x(t)\}$, соответствующую оператору L_2. Последовательности $\{X_{1,n}^x(t)\}$, $\{X_{2,n}^x(t)\}$, $x\in R^r$ можно, например, построить как решения стохастических дифференциальных уравнений

$$dX^x_{k,n}(t)=\sigma_k(X^x_{k,n}(t))dw^{k,n}_t+b_k(X^x_{k,n}(t))dt,$$

$$X^x_{k,n}(0)=X,\ x\in R^r,\ k=1,2;\ n=1,2,\ldots$$

Здесь $w^{1,n}_t$ и $w^{2,n}_t$—независимые r-мерные винеровские процессы, определенные на некотором вероятностном пространстве

$$(\Omega^2,\ F^2,\ P^2);\ \sigma_k(x)\cdot\sigma^*_k(x)=(a^{ij}(x)),$$

$b_k(x)=(b^1_k(x),\ b^2_k(x),\ \ldots,\ b^r_k(x))$. Матрицы $\sigma_k(x)$ выбираются так, чтобы их элементы удовлетворяли условию Липшица.

Построим теперь семейство $(X^{x,i}_t,\ \nu^{x,i}_t)$, $x\in R^r$, $i=1,2$. Пусть для определенности $i=1$. Положим $\nu^{x,1}_t=1$, $X^{x,1}_t=X^x_{1,1}(t)$ при $0\leqslant t<\tau_1$, где случайная величина τ_1 определяется из уравнения

$$\int_0^{\tau_1} c_{12}(X^x_{1,1}(s))ds=\bar{\tau}_1.$$

Далее положим $\nu^{x,1}_{\tau_1+t}=2$, $X^{x,1}_{\tau_1+t}=X^{X^{x,1}_{\tau_1}}_{2,1}(t)$ при $0\leqslant t<\tau_2$, где τ_2 определяется из уравнения

$$\int_0^{\tau_2} c_{21}(X^{X^{x,1}_{\tau_1}}_{2,1}(s))ds=\bar{\tau}_2.$$

Далее по индукции

$$\nu^{x,1}_{\tau_1+\ldots+\tau_n+t}=\begin{cases}1, & \text{при } n=2k\\ 2, & \text{при } n=2k+1\end{cases};$$

$$X^{x,1}_{\tau_1+\ldots+\tau_n+t}=\begin{cases}X^{X^{x,1}_{\tau_1+\ldots+\tau_n}}_{1,k+1}(t), & \text{при } n=2\cdot k\\ X^{X^{x,1}_{\tau_1+\ldots+\tau_n}}_{2,k+1}(t), & \text{при } n=2k+1\end{cases}$$

при $t\in[0,\ \tau_{n+1})$, где τ_{n+1}—корень уравнения

$$\int_0^{\tau_{n+1}} c_{12}(X^{X^{x,1}_{\tau_1+\ldots+\tau_n}}_{1,k+1}(s))ds=\bar{\tau}_{n+1},$$

если $n=2k$, и уравнения

$$\int_0^{\tau_{n+1}} c_{21}(X^{X^{x,1}_{\tau_1+\ldots+\tau_n}}_{2,k+1}(s))ds=\bar{\tau}_{n+1},$$

если $n=2k+1$.

Так как $\sum_{l=1}^{n}\bar{\tau}_l\to\infty$ при $n\to\infty$ с вероятностью 1, то этими равенствами $X^{x,1}_t$ и $\nu^{x,1}_t$ определены для всех $t\geqslant 0$. Аналогично определяются случайные функции $X^{x,2}_t$ и $\nu^{x,2}_t$. Верна следующая

Теорема 1. *Случайные функции* $(X^{x,i}_t,\ \nu^{x,i}_t)$, $x\in R^r$, $i=1,2$, *образуют строго марковское семейство в фазовом пространстве* $R^r\times\{1,2\}$. *Инфинитезимальный оператор* A *семейства* $(X^{x,i}_t,\ \nu^{x,i}_t)$

на функциях $f(x, k)$, имеющих равномерно-непрерывные и ограниченные производные первого и второго порядка по $x \in R^r$, определен и

$$Af(x, k) = L_k f(x, k) + c_{ki}(x)[f(x, i) - f(x, k)], \quad k \neq i, \ i, \ k = 1, 2.$$

Перейдем теперь к вероятностному представлению решений для систем вида (1) и близких к ним.

Сначала рассмотрим задачу Коши для системы (1) с начальными условиями

$$u_1(0, x) = g_1(x), \quad u_2(0, x) = g_2(x). \tag{2}$$

Здесь $g_1(x)$ и $g_2(x)$—ограниченные непрерывные функции.

Теорема 2. *Если решение задачи Коши для системы* (1) *с начальными условиями* (2) *существует, то оно представимо в виде*

$$u_k(t, x) = M g_{\nu_t^{x,k}}(X_t^{x,k}) \exp\left\{\int_0^t c_{\nu_s^{x,k}}(X_s^{x,k}) ds\right\},$$

где $c_l(x) = c_{ll}(x) + c_{lj}(x)$, $i, j = 1, 2$, $l \neq j$. Рассмотрим теперь задачу Дирихле

$$\begin{cases} L_1 u_1(x) + c_{11}(x) u_1(x) + c_{12}(x) u_2(x) = 0 \\ L_2 u_2(x) + c_{21}(x) u_1(x) + c_{22}(x) u_2(x) = 0 \\ x \in D \subset R^r, \ u_1(x)/_{\partial D} = \Psi_1(x), \ u_2(x)/_{\partial D} = \Psi_2(x) \end{cases} . \tag{3}$$

Здесь D—ограниченная область в R^r с гладкой границей ∂D; $\Psi_1(x)$, x)—непрерывные функции.

Теорема 3. *Предположим, что $c_i(x) \leqslant 0$, $i = 1, 2$, и операторы L_1 и L_2 не вырождаются в $D \cup \partial D$. Тогда решение задачи* (3) *допускает представление*

$$u_k(x) = M \Psi_{\nu_\tau^{x,k}}(X_\tau^{x,k}) \exp\left\{\int_0^\tau c_{\nu_s^{x,k}}(X_s^{x,k}) ds\right\},$$

где $x \in D$ $k = 1, 2$; $\tau = \tau^{x,k} = \inf\{t : X_t^{x,k} \notin D\}$—момент первого выхода из D для процесса $X_t^{x,k}$.

Ереванский государственный университет

Վ. Վ. ՍԱՐԱՖՅԱՆ

Մարկովյան պրոցեսներ և եզրային խնդիրներ համակարգերի մի դասի համար

Դիտարկենք դիֆերենցիալ հավասարումների հետևյալ համակարգը

$$\frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} = L_1 u_1(t, x) + c_{11}(x) u_1(t, x) + c_{12}(x) u_2(t, x)$$

$$\frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} = L_2 u_2(t, x) + c_{21}(x) u_1(t, x) + c_{22}(x) u_2(t, x)$$

որտեղ՝

$$L_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} a_k^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{r} b_k^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$x \in R^r, \quad k = 1, 2, \quad \sum_{i,j=1}^{r} a_k^{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 > 0.$$

Այս համակարգի Կոշու խնդրի և համապատասխան ստացիոնար խնդիրների ուսումնասիրման համար կառուցվում է $(X_t^{x,i}, \nu_t^{x,i})$ *մարկովյան ընտանիքը և նրան համապատասխանող* $Z_t = (X_t, \nu_t, P_{x,i})$ *մարկովյան պրոցեսը։*

Z_t *մարկովյան պրոցեսի համար տեղի ունի Իտոյի բանաձևի ընդհանրացումը (2), որի օգնությամբ հաշվվում է* $(X_t^{x,i}, \nu_t^{x,i})$ *ընտանիքի ինֆինիտեզիմալ օպերատորը և կառուցվում է Կոշու և Դիրիխլեի խնդիրների լուծումների հավանականային ներկայացումները (թեորեմ 2, 3)։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Е. Б. Дынкин*, Марковские процессы, Физматгиз, М., 1963. [2] *А. Д. Вентцель*, Курс теории случайных процессов, Наука, М., 1975.