ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXI 1985 3

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Член-корреспондент АН Армянской ССР Б. Л. Абрамян

Об одной задаче распространения упругих волн в полупространстве

(Представлено 5/XI 1984)

В работе получено замкнутое решение для задачи о колебаниях полупространства, вызванных динамической нагрузкой, приложенной в точке на поверхности полупространства на конечном расстоянии от начала координатной системы. Используются интегральные преобразования Лапласа и Ханкеля.

1. *Основные уравнения движения упругого тела в цилиндрической системе координат.* Известно, что в пространственных динамических задачах теории упругости перемещения точек упругой среды можно определять при помощи скалярной и векторной потенциальных функций Φ и $\overline{\Psi}$ [1,2]

$$u_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial\Psi_\varphi}{\partial z};$$

$$u_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}+\frac{\partial\Psi_r}{\partial z}-\frac{\partial\Psi_z}{\partial r}; \tag{1}$$

$$u_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\Psi_\varphi}{\partial r}+\frac{\Psi_\varphi}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_r}{\partial\varphi},$$

где функции $\Phi(r, \varphi, z, t)$ и $\Psi_s(r, \varphi, z, t)$ $(s=r, \varphi, z)$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2\Phi-a^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\nabla^2\cdot\Psi_z-b^2\frac{\partial^2\Psi_z}{\partial t^2}=0, \tag{2}$$

$$\nabla^2\Psi_r-\frac{\Psi_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\Psi_\varphi}{\partial\varphi}-b^2\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial t^2}=\nabla^2\Psi_\varphi-\frac{\Psi_\varphi}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\Psi_r}{\partial\varphi}-b^2\frac{\partial^2\Psi_\varphi}{\partial t^2}=0$$

$a^2=\rho/(\lambda+2G)$, $b^2=\rho/G$, λ и G—упругие постоянные Ляме, ρ—плотность материала, u_s и Ψ_s $(s=r, \varphi, z)$ соответственно компоненты перемещения и векторного потенциала, $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

2. *Об одной задаче динамической теории упругости для полупространства (задача „A").* Требуется определить перемещения на поверхности полупространства, возбужденном действием динамических нагрузок, которые приложены на поверхности полупространства на расстоянии r_0 от начала координатной системы.

Граничные условия этой задачи можно представить следующими соотношениями:

$$\sigma_z|_{z=0} = -Pf_1(t)\delta(r-r_0)\delta(\varphi),\ \tau_{rz}|_{z=0} = -Qf_2(t)\delta(r-r_0)\delta(\varphi),\ \tau_{z\varphi}|_{z=0} = 0, \quad (3)$$

где P и Q—соответственно амплитуды вертикальной и горизонтальной сил, приложенных на поверхности полупространства, $f_i(t)$—функции от времени, определяющие вид динамической нагрузки, $\delta(z)$—дельта функция Дирака [3], σ_z, σ_φ, σ_r, τ_{rz}, $\tau_{z\varphi}$ и $\tau_{r\varphi}$—напряжения.

Вместе с условиями (3) следует пользоваться также условиями симметрии деформации полупространства относительно осевых плоскостей $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$

$$u_\varphi|_{\varphi=0,\pi} = \tau_{\varphi z}|_{\varphi=0,\pi} = \tau_{r\varphi}|_{\varphi=0,\pi} = 0. \quad (4)$$

Решение задачи «А» с условиями (3) и (4) можно построить в виде суммы решений двух вспомогательных задач «В» и «С», составленных на основе задачи «А».

Задача „В". Вводятся обозначения $u_s^{(1)}$ $(s=r,\ z,\ \varphi)$ для перемещений и аналогичным образом для напряжений. Граничные условия этой задачи имеют вид

$$\sigma_z^{(1)}|_{z=0} = -\frac{P}{2}f_1(t)\delta(r-r_0)[\delta(\varphi)-\delta(\pi-\varphi)],\ \tau_{z\varphi}^{(1)}|_{z=0}=0,$$

$$\tau_{rz}^{(1)}|_{z=0} = -\frac{Q}{2}f_2(t)\delta(r-r_0)[\delta(\varphi)-\delta(\pi-\varphi)]. \quad (5)$$

Для этой задачи осевые плоскости $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ являются плоскостями симметрии деформации, а плоскости $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ — плоскостями антисимметрии. На этих плоскостях имеют место условия

$$\left.\begin{array}{l} u_\varphi^{(1)}|_{\varphi=0,\pi} = \tau_{r\varphi}^{(1)}|_{\varphi=0,\pi} = \tau_{z\varphi}^{(1)}|_{\varphi=0,\pi} = 0 \\ u_z^{(1)}|_{\varphi=\pm\frac{\pi}{2}} = u_r^{(1)}|_{\varphi=\pm\frac{\pi}{2}} = \sigma_\varphi^{(1)}|_{\varphi=\pm\frac{\pi}{2}} = 0 \end{array}\right\}. \quad (6)$$

Задача „С". Вводятся обозначения $u_s^{(2)}$ для перемещений и аналогичным образом для напряжений.

Граничные условия этой задачи имеют вид

$$\sigma_z^{(2)}|_{z=0} = -\frac{P}{2}f_1(t)\delta(r-r_0)[\delta(\varphi)+\delta(\pi-\varphi)],\ \tau_{z\varphi}^{(2)}|_{z=0}=0,$$

$$\tau_{rz}^{(2)}|_{z=0} = -\frac{Q}{2}f_2(t)\delta(r-r_0)[\delta(\varphi)+\delta(\pi-\varphi)]. \quad (7)$$

Для этой задачи осевые плоскости $\varphi=0$, $\varphi=\pi$ и $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ являются плоскостями симметрии деформации, и на этих плоскостях имеют место условия

$$u_\varphi^{(2)}|_{\varphi=\pm\frac{\pi}{2},0,\pi} = \tau_{z\varphi}^{(2)}|_{\varphi=\pm\frac{\pi}{2},0,\pi} = \tau_{r\varphi}^{(2)}|_{\varphi=\pm\frac{\pi}{2},0,\pi} = 0. \quad (8)$$

Решения задач «В» и «С» ищутся в виде

$$u_r^{(m)} = u_m \cos m\varphi, \quad u_\varphi^{(m)} = v_m \sin m\varphi, \quad u_z^{(m)} = w_m \cos m\varphi \quad (m=1, 2). \tag{9}$$

Исходя из обозначений (9) для решения вспомогательных задач «B» и «C» потенциальные функции $\Phi^{(m)}(r, \varphi, z, t)$ и $\Psi_s^{(m)}(r, \varphi, z, t)$ $(m=1, 2)$ берутся в виде

$$\left.\begin{aligned} &\Phi^{(m)} = \varphi_m(r, z, t)\cos m\varphi, \quad \Psi_z^{(m)} = \psi_z^{(m)}(r, z, t)\sin m\varphi \\ &\Psi_r^{(m)} = \frac{1}{2}\left[\psi_1^{(m)}(r, z, t) + \psi_2^{(m)}(r, z, t)\right]\sin m\varphi \\ &\Psi_\varphi^{(m)} = \frac{1}{2}\left[\psi_1^{(m)}(r, z, t) - \psi_2^{(m)}(r, z, t)\right]\cos m\varphi \end{aligned}\right\} \quad (m=1, 2). \tag{10}$$

Такое представление потенциальных функций является удобным при удовлетворении условий задачи.

Подобным образом решение одной динамической задачи для полупространства построено в работе ([4]).

Функции, входящие в (10), удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\left(\nabla_m^2 - a^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi_m = \left(\nabla_m^2 - b^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi_z^{(m)} = 0 \\ &\left(\nabla_{m-1}^2 - b^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi_1^{(m)} = \left(\nabla_{m+1}^2 - b^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi_2^{(m)} = 0 \end{aligned}\right| \quad (m=1, 2), \tag{11}$$

$$\text{где } \nabla_s^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{s^2}{r^2}.$$

Используя преобразования Лапласа и Ханкеля, решения уравнений (1) берем в виде

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\xi t}d\xi \int_0^\infty \beta J_m(\beta r)\overset{*}{\varphi}_m(\beta, z, \xi)d\beta \\ &\psi_z^{(m)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\xi t}d\xi \int_0^\infty \beta J_m(\beta r)\overset{*}{\psi}{}_z^{(m)}(\beta, z, \xi)d\beta \\ &\psi_1^{(m)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\xi t}d\xi \int_0^\infty \beta J_{m-1}(\beta r)\overset{*}{\psi}{}_1^{(m)}(\beta, z, \xi)d\beta \\ &\psi_2^{(m)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\xi t}d\xi \int_0^\infty \beta J_{m+1}(\beta r)\overset{*}{\psi}{}_2^{(m)}(\beta, z, \xi)d\beta \end{aligned}\right|, \tag{12}$$

где $J_n(x)$—функция Бесселя первого рода от действительного аргумента, а функции $\overset{*}{\varphi}_m$ и $\overset{*}{\psi}{}_s^{(m)}$ $(s=z, 1, 2)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2\overset{*}{\varphi}_m}{\partial z^2} - (\beta^2 + a^2\xi^2)\overset{*}{\varphi}_m = \frac{\partial^2\overset{*}{\psi}{}^{(m)}}{\partial z^2} - (\beta^2 + b^2\xi^2)\overset{*}{\psi}{}_s^{(m)} = 0. \tag{13}$$

Решения уравнений (13) берутся в виде

$$\overset{*}{\varphi}_m = B^{(m)}(\beta, \xi)e^{-z\sqrt{\beta^2 + a^2\xi^2}}, \quad \overset{*}{\psi}{}_s^{(m)} = B_s^{(m)}(\beta, \xi)e^{-z\sqrt{\beta^2 + b^2\xi^2}}, \tag{14}$$

где учтены условия для обеспечения единственности решения.

Известно, что функции Ψ_s $(s=r,\ \varphi,\ z)$ могут быть связаны друг с другом любым линейным соотношением, которое выбирается в соответствии с рассмотренной задачей [4,5]. Как в работе [4], здесь используется соотношение $\operatorname{div}\overline{\Psi}=0$.

С учетом использованных обозначений эта связь примет вид

$$\beta(\overset{*}{\psi}{}_1^{(m)}-\overset{*}{\psi}{}_2^{(m)})=2\frac{\partial\overset{*}{\psi}{}_z^{(m)}}{\partial z}\quad(m=1,\ 2)\tag{15}$$

или

$$\beta(B_2^{(m)}-B_1^{(m)})=2\sqrt{\beta^2+b^2\xi^2}\,B_z^{(m)}\quad(m=1,\ 2).\tag{16}$$

3. *Определение перемещений для задач «В» и «С».* Используя вместе с обозначениями (9) также и обозначения

$$\sigma_z^{(m)}=\bar{\sigma}_z^{(m)}\cos m\varphi,\quad \tau_{rz}^{(m)}=\bar{\tau}_{rz}^{(m)}\cos m\varphi,\quad \tau_{z\varphi}^{(m)}=\bar{\tau}_{z\varphi}^{(m)}\sin m\varphi,\tag{17}$$

легко видеть, что условия (6) и (8) удовлетворяются тождественно.

Представляем условия (5) и (7) в виде

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\sigma}_z^{(m)}(r,\ 0,\ t)=-\frac{2P}{\pi}f_1(t)\delta(r-r_0),\\&\bar{\tau}_{rz}^{(m)}(r,\ 0,\ t)\pm\bar{\tau}_{z\varphi}^{(m)}(r,\ 0,\ t)=-\frac{2Q}{\pi}f_2(t)\delta(r-r_0)\end{aligned}\right\}.\tag{18}$$

Выразив по известным формулам напряжения при помощи функций φ_m и $\psi_s^{(m)}$ $(s=z,\ 1,\ 2)$, далее удовлетворив условиям (18), определим функции интегрирования $B^{(m)}$ и $B_s^{(m)}$. Подставляя найденные значения в формулы для перемещений, для определения перемещений на поверхности полупространства получим следующие выражения:

$$w_m(r,\ 0,\ t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{\xi t}d\xi\int\limits_0^\infty\frac{\beta J_m(\beta r)d\beta}{D(\beta,\ \xi)}\Big\{F_1^{(m)}\Big[2\beta\sqrt{(\beta^2+a^2\xi^2)(\beta^2+b^2\xi^2)}-$$
$$-\beta(2\beta^2+b^2\xi^2)\Big]-F_2^{(m)}\xi^2b^2\sqrt{\beta^2+\xi^2a^2}+\frac{2Q}{\pi Gb^2\xi^2}\bar{f}_1(\xi)D(\beta,\ \xi)mJ_m(\beta r_0)\Big\},\tag{19}$$

$$u_m(r,\ 0,\ t)+v_m(r,\ 0,\ t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{\xi t}d\xi\int\limits_0^\infty\frac{\beta J_{m+1}(\beta r)d\beta}{D(\beta,\ \xi)}\Big\{F_2^{(m)}[2\beta\sqrt{(\beta^2+a^2\xi^2)(\beta^2+b^2\xi^2)}-$$
$$-\beta(2\beta^2+b^2\xi^2)]-F_1^{(m)}\xi^2b^2\sqrt{\beta^2+b^2\xi^2}+\frac{2Q\beta}{\pi Gb^2\xi^2}\bar{f}_2(\xi)(\beta^2+b^2\xi^2)^{-\frac{1}{2}}D(\beta,\ \xi)mJ_m(\beta r_0)\Big\}\tag{20}$$

$$u_m(r,\ 0,\ t)-v_m(r,\ 0,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{\xi t}d\xi\int\limits_0^\infty\frac{\beta J_{m-1}(\beta r)d\beta}{D(\beta,\ \xi)}\Big\{F_2^{(m)}[2\beta\sqrt{(\beta^2+a^2\xi^2)(\beta^2+b^2\xi^2)}-$$
$$-\beta(2\beta^2+b^2\xi^2)]-F_1^{(m)}b^2\xi^2\sqrt{\beta^2+b^2\xi^2}+\tag{21}$$

$$+\frac{2Q}{\pi G\beta b^2\xi^2}\bar{f}_2(\xi)(\beta^2+2b^2\xi^2)(\beta^2+b^2\xi^2)^{-\frac{1}{2}}D(\beta,\xi)mJ_m(\beta r_0)\Big\}$$

Здесь использованы обозначения:

$$D(\beta,\xi)=4\beta^2\sqrt{(\beta^2+a^2\xi^2)(\beta^2+b^2\xi^2)}-(2\beta^2+b^2\xi^2)^2,$$

$$F_1^{(m)}(\beta,\xi)=-\frac{2Q}{\pi G}\bar{f}_2(\xi)\left[r_0J_{m+1}(\beta r_0)+\frac{2\beta}{\xi^2b^2}mJ_m(\beta r_0)\right],$$

$$F_2^{(m)}(\beta,\xi)=-\frac{2P}{\pi G}\bar{f}_1(\xi)r_0J_m(\beta r_0)-\frac{4Q}{\pi G\xi^2b^2}\bar{f}_2(\xi)\sqrt{\beta^2+b^2\xi^2}\,mJ_m(\beta r_0),$$

$$\bar{f}_m(\xi)=\int\limits_0^\infty e^{-\xi t}f_m(t)dt.$$

Интегралы в правых частях выражений (19)—(21) понимаются в смысле главного значения Коши. При вычислении этих интегралов учитываются корни уравнения $D(\beta,\xi)=0$.

Другим способом одна несимметричная динамическая задача для полупространства рассмотрена в работе (6).

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ թղթակից անդամ Բ. Լ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ

Կիսատարածության մեջ առաձգական ալիքների տարածման մի խնդրի մասին

Աշխատանքում ստացվել է փակ լուծում կիսատարածության տատանումների վերաբերյալ խնդրի համար։ Տատանումներն առաջանում են կիսատարածության մակերևույթի վրա կոորդինատային սիստեմի սկզբնակետից վերջավոր հեռավորության վրա գտնվող կետում կիրառված դինամիկ ուժերի ազդեցության շնորհիվ։

Խնդիրը լուծվում է Լապլասի և Հանկելի ինտեգրալ ձևափոխությունների օգտագործումով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *J. D. Achenbach*, Wave propagation in Elastic Solids, North-Holland Publ. Co. Amsterdam, 1973. [2] *С. Л. Соболев*, в кн.: *Ф. Франк, Р. Мизес*, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, гл. XII, ОНТИ, Л.,—М., 1937. [3] *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов*, Обобщенные функции и действия над ними, 2-е изд., Физматгиз, М., 1959. [4] *Chi-Chang Chao*, Journal of Appl. Mech. (Trans. ASME, ser. E), v. 27, № 3 (1960). [5] *Г. И. Петрашень, Н. С. Смирнова, Б. Я. Гельчинский*, Уч. зап. ЛГУ Серия мат. наук, вып. 27, № 170 (1953). [6] *Е. И. Шемякин, В. Файншмидт*, Уч. зап. ЛГУ. Серия мат. наук, вып. 28, № 177 (1954).